Problema 202. — A bacia de um repuxo tem a fórma hexagonal regular e uma das faces mede $2^m,50$ de comprimento; pede-se a menor distancia do centro d'essa bacia ao meio de um lado.

A menor distancia é o apothema e o lado é egual ao raio, portanto

$$Ap = 2,50 \times 0,866 = 2^m,165$$

ÁREA DO OCTOGONO REGULAR

A **área** do octogono regular é egual ao producto do quadrado de um de seus lados pelo numero constante 4,828:

$$\text{Área} = L^2 \times 4,828$$

O numero constante resulta de:

$$2(1+\sqrt{2}) = 2 \times 2,414 = 4,828$$

Problema 203. — Qual a área de um parque de fórma octogonal regular cujo lado mede $142^m,85$?

$$\text{Área} = \overline{142,85}^2 \times 4,828 = 98520^{m2},759430$$

Se o octogono é inscripto em um circulo cujo raio é conhecido: 1°. a sua **área** é egual ao quadrado d'esse raio multiplicado pelo numero constante 2,828

$$\text{Área} = R^2 \times 2\sqrt{2} = R^2 \times 2,828$$

Problema 204. — Deseja-se ladrilhar um banheiro de fórma octogonal regular, cuja distancia do centro a um

dos vertices mede $2^m,25$; o metro quadrado de ladrilho custa 6$000. Em quanto importará a despeza?

A área do banheiro $= \overline{2,25}^2 \times 2,828 = 14^{m2},3167$.

E, a despeza importará em:

$$14,3167 \times 6\$000 = 85\$900$$

2°. — O seu *lado* será egual ao raio multiplicado pelo numero constante 0,765 e o seu **apothema** terá por medida o producto do raio pelo numero constante 0,924.

$$\text{Lado} = R\sqrt{2-\sqrt{2}} = R\sqrt{2,00000-1,41421} = R\sqrt{0,58579} = R \times 0,765$$

$$Ap = \frac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{2}R\sqrt{2+1,41421} = \frac{1}{2}R\sqrt{3,41421} = R \times \frac{1,8477}{2} = R \times 0,924$$

Problema 205. — Qual o lado de um octogono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $0^m,90$?

$$\text{Lado} = 0,90 \times 0,765 = 0^m,6885$$

Problema 206. — Qual o apóthema de um octogono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $1^m,48$?

$$Ap = 1,48 \times 0,924 = 1^m,36752$$

ÁREA DO DECAGONO REGULAR

A **área** de um decagono regular é egual ao producto do quadrado do lado pelo numero constante 7,694

$$\text{Área} = L^2 \times 7{,}694$$

O numero constante é o resultado do seguinte calculo:

$$\frac{5}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{5}{2}\sqrt{5+2\times 2{,}23606} =$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{5+4{,}47212} = \frac{5}{2}\sqrt{9{,}47212} =$$

$$= \frac{5}{2}\,3{,}077 = 7{,}694$$

Problema 207. — Qual a área de um ladrilho de fórma decagonal regular cujo ladó mede $0^m{,}09$?

$$\text{Área} = \overline{0{,}09}^2 \times 7{,}694 = 6^{m^2}{,}232140$$

Sendo inscripto em um circulo de raio conhecido: 1°. — A **área** do decagono é egual ao producto do quadrado do raio pelo numero constante 2,9389.

$$\text{Área} = R^2 \times 2{,}9389$$

E esse numero constante resulta de:

$$\frac{5}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \frac{5}{4}\sqrt{10-2\times 2{,}23606} =$$

$$= \frac{5}{4}\sqrt{10-4{,}47212} = \frac{5}{4}\sqrt{10{,}00000-4{,}47212} =$$

$$= \frac{5}{4}\sqrt{5{,}52788} = 2{,}9389$$

2°. — O *lado* do decagono regular inscripto é egual ao producto do raio do circulo circumscripto pelo numero constante 0,618.

$$L = \frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1) = R\times 0{,}618$$

3°. — O *apothema* do mesmo polygono é egual ao producto do raio pelo numero constante 0,951

$$Ap = \frac{1}{4}R\sqrt{10+2\sqrt{5}} = R\times 0{,}951$$

Problema 208. — Qual o lado de um decagono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $5^m{,}80$?

$$L = 5{,}80 \times 0{,}618 = 3^m{,}5844$$

Problema 209. — Qual o apóthema de um decagono regular inscripto em um circulo de raio $= 0^m{,}96$?

$$Ap = 0{,}96 \times 0{,}951 = 0^m{,}91296$$

ÁREA DO DODECAGONO REGULAR

A **área** do dodecagono regular é egual ao producto do quadrado de um lado pelo numero constante 11,196

$$\text{Área} = 3L^2(2+\sqrt{3}) = L^2 \times 3 \times 3{,}73205 =$$
$$= L^2 \times 11{,}196$$

Problema 210. — Qual a área de um dodecagano regular cujo lado mede $2^m,65$?

$$\text{Área} = \overline{2,65}^2 \times 11{,}196 = 7{,}0225 \times 11{,}196 =$$
$$78^{m2},623910$$

Se o dodecagono é inscripto em um circulo cujo raio é dado : 1°. — A sua **área** é egual ao producto do quadrado do raio por 3.

$$\text{Área} = 3\,R^2$$

2°. — O *lado* é egual ao producto do raio pelo numero constante 0,517

$$= L = R\sqrt{2-\sqrt{3}} = R\sqrt{2-1{,}73205} =$$
$$= R\sqrt{0{,}26795} = R \times 0{,}517$$

3°. — O *apothema* é egual ao producto do raio pelo numero constante 0,966

$$A\,p = \frac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2}R\sqrt{2+1{,}73205} =$$
$$= \frac{1}{2}R\sqrt{3{,}73205} = R \times \frac{1{,}9318}{2} = R \times 0{,}966$$

Problema 211. — Qual a área de um dodecagono regular inscripto num circulo cujo raio mede $60^m,50$?

$$\text{Área} = 3 \times \overline{60,50}^2 = 3 \times 3660{,}25 = 10980^{m2},75$$

Problema 212. — Qual o lado de um dodecagono regular inscripto em um circulo cujo raio mede 5^m72?

$$L = 5{,}72 \times 0{,}517 = 2^m,95724$$

Problema 213. — Qual o apóthema de um dodecagono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $30^m,82$?

$$Ap = 30{,}82 \times 0{,}966 = 29^m,77212$$

ÁREA DAS FIGURAS CIRCULARES.

ÁREA DO CIRCULO

Raio e circumferencia

A **área** de um *circulo* cujo *raio* e *circumferencia* são conhecidos é egual ao producto da *circumferencia* pela metade do *raio* :

$$\text{Área do circulo} = \pi \times D \times \frac{R}{2}$$

porque o *circulo* é considerado como um polygono regular cujos lados muitissimo pequenos formam a *circumferencia* e cujo apothema confunde-se com o *raio*.

Problema 214. — Qual a área de um circulo cuja circumferencia mede 44 centimetros e o raio 7 centimetros?

Multipliquemos a circumferencia pela metade do raio e teremos :

$$44 \times \frac{7}{2} = \frac{44 \times 7}{2} = 22 \times 7 = 154 \text{ centimetros quadradros}$$

Raio

Conhecido o *raio*, a **área** do *circulo* é egual á relação entre a circumferencia e o diametro, multiplicada pelo quadrado do *raio*.

$$\text{Área do circulo} = \pi R^2 = 3{,}1416 \times R^2$$

Problema 215. — Qual a área de um circulo cujo raio = 5 centimetros ?

Multipliquemos 3,1416 por 5^2 e teremos :

$$3{,}1416 \times 25 = 78^{cm^2}{,}54$$

Circumferencia

Dada a *circumferencia*, a **área** é egual ao quadrado da *circumferencia* dividido pelo quadruplo de π.

$$\text{Área do circulo} = \frac{C^2}{4\pi}$$

Problema 216. — Qual a área de um circulo cuja circumferencia mede 8 centimetros ?

Elevemos 8 ao quadrado :

$$8^2 = 8 \times 8 = 64$$

e multipliquemos $4 \times 3{,}1416 = 12{,}5664$

dividamos 64 por 12,5664 e acharemos

$$\frac{64}{12{,}5664} = 509 \text{millimetros quadrados}$$

Quando a *área do circulo* é conhecida e quer saber qual o **raio**, extrae-se a raiz quadrada do quociente da divisão da área do circulo por 3,1416 (π).

$$R = \sqrt{\frac{\text{Área do circulo}}{3{,}1416}}$$

Problema 217. — Qual o raio do circulo cuja área = 4225 centimetros quadrados ?

A área do circulo dividida por 3,1416 dá :

$$\frac{4225}{3{,}1416} = 1344$$

e portanto o raio $= \sqrt{1344} = 36^{cm^2}{,}66$.

ÁREA DO SECTOR CIRCULAR

A **área** do **sector circular** é egual ao producto do *arco* que lhe serve de base pela metade do *raio*.

$$\text{Área do sector} = \text{Arco} \times \frac{R}{2}$$

porque o sector nada mais é do que um total de uma infinidade de triangulos, todos com um vertice commum (o centro de circulo) e cuja somma das bases coincide com o arco.

Problema 218. — Qual a área de um sector circular cujo raio = 6 centimetros e o arco 45°?
A circumferencia na qual está o arco é:

$$\pi \times D = 3{,}1416 \times 12 = 37^{cm}{,}69$$

Se 360° ou a circumferencia inteira = $37^{cm}{,}69$; 1 gráo será egual a

$$\frac{37{,}69}{360}$$

e 45° serão eguaes a

$$\frac{37{,}69 \times 45}{360} = 4^{cm}{,}71$$

A área será portanto

$$4{,}71 \times \frac{6}{2} = \frac{4{,}71 \times 6}{2} = 14^{cm^2}{,}13.$$

ÁREA DO SEGMENTO CIRCULAR

A **área** do ***segmento circular*** é egual á do *sector*, menos a do *triangulo* formado pelos dois raios e a corda que une as extremidades dos mesmos raios.

Área do segmento = A. sector — A. triangulo.

Denominando-se A a área do segmento, A′ a do sector, e A″ a do triangulo:

$$A = A' - A''$$

Na fig. 406 a área do segmento AMB = á do sector AMBO menos a do triangulo ABO.

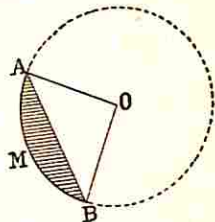



Fig. 406.

Problema 219. — Qual a área de um segmento de circulo de raio egual a 8 centimetros e limitado por um arco de 90° e uma corda egual ao lado do quadrado inscripto?

A circumferencia da qual faz parte o arco de 90° é egual á

$$3{,}1416 \times 8 + 8 = 50^{cm}{,}2656$$

portanto o arco de 90° =

$$= \frac{50{,}2656 \times 90}{360} = \frac{4523{,}9040}{360} = 12^{cm}{,}5664$$

e a área do sector circular =

$$= 12{,}5664 \times \frac{8}{2} = 50^{cm^2}{,}2656$$

Sendo a área do triangulo formado pelos dois raios e pelo lado do quadrado =

$$= \frac{8 \times 8}{2} = 8 \times 4 = 32 \text{ cmq.}$$

a área do segmento será $= 50{,}2656 - 32 = 18^{cm^2}{,}2656$

ÁREA DA CORÔA CIRCULAR

A **área** da ***corôa circular*** é egual á differença dos dois circulos que lhe servem de limite ou ao producto de π pela differença entre os quadrados dos dois raios.

Se tomarmos R como raio do circulo maior e r raio do circulo menor, teremos a **área** da *coróa circular* representada por :

$$\pi R^2 - \pi r^2 \text{ ou } \pi (R^2 - r^2)$$

Problema 220. — Qual a área da uma corôa circular cujos raios medem 8 centimetros e 6 centimetros ?

Sendo os circulos concentricos eguaes :

O maior á $3{,}1416 \times 8^2 = 3{,}1416 \times 64 = 201^{cm^2}{,}0624$

e o menor á $3{,}1416 \times 6^2 = 3{,}1416 \times 36 = 113^{cm^2}{,}0976$

A área da corôa será egual a

$$201{,}0624 - 113{,}0976 = 87^{cm^2}{,}9648$$

ou

$$3{,}1416 \times (8^2 - 6^2) = 3{,}1416\,(64 - 36) =$$
$$= 3{,}1416 \times 28 = 87^{cm^2}{,}9648$$

FIGURAS EQUIVALENTES.

Duas ou mais **figuras** que têm a mesma **área,** sem entretanto terem a mesma fórma, são **equivalentes.**

Tomemos, por exemplo, o quadrado ABCD (fig. 407). Dividamos os lados AC e BD ao meio, unamos o ponto M ao ponto N O quadrado acha-se dividido em dois rectangulos eguaes. Colloquemos o rectangulo MNCD de sorte que o lado MC coincida com o lado BN do rectangulo ABMN.

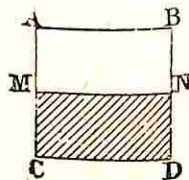



Fig. 407.

Obtemos d'este modo um rectangulo ANMD (fig. 408) tendo evidentemente a mesma **área** que o quadrado ABCD. Portanto o quadrado ABCD e o rectangulo ANMD são **figuras equivalentes.**

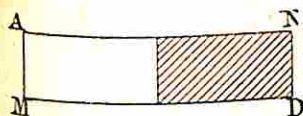



Fig. 408.

Se traçamos a diagonal BC, o quadrado ABCD (fig. 409) fica dividido em dois triangulos rectangulo-isosceles eguaes; colloquemos o triangulo CDB de maneira que o lado CD coincida com o lado AB do triangulo CAB; formamos assim um parallelogrammo (fig. 410) com a mesma **área** do quadrado ABCD.

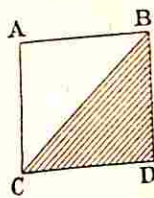
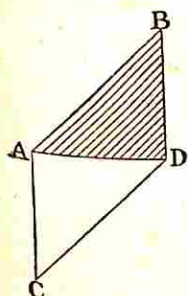



Fig. 409.

O rectangulo ANMD (fig. 411) tambem póde ser transformado em um parallelogrammo equivalente. A diagonal NM divide-o em dois triangulos-

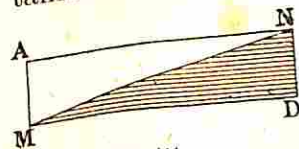



Fig. 410.

Fig. 411.

escalenos eguaes ANM e DMN. Façamos coincidir o lado AM do primeiro com ND do

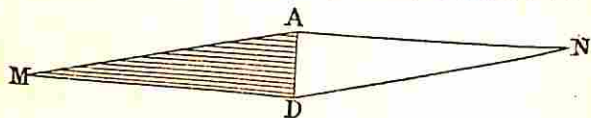



Fig. 412.

segundo, e teremos o parallelogrammo AMDN (fig. 412.)

Façamos agora coincidir o lado AN com DM e o ponto A com o ponto D: formamos um triangulo isosceles (fig. 413) equivalente a cada uma das figuras precedentes.

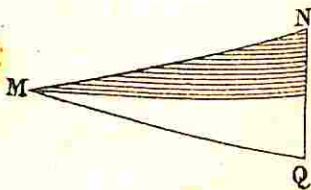
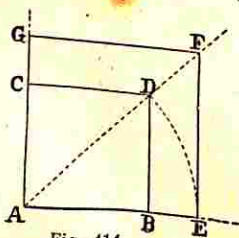



Fig. 413.

Estas combinações podem ser mais variadas e mais rapidamente executadas se recortarmos em cartão os triangulos que formam o rectangulo ANMD.

Problema 221. — Dado um quadrado, traçar um outro cuja área seja o dobro da do primeiro.

Seja ABCD o quadrado (fig. 414).

Prolonguemos os lados AB e AC e tracemos a diagonal AD que prolongaremos na direcção de A para D.

Fig. 414.

Façamos centro em A e, com um raio egual a AD, descrevamos o arco DE. D'este ultimo ponto, como centro, e com um raio = EA, cortemos em F o prolongamento da diagonal.

Centro em A e com o mesmo raio cortemos em G o prolongamento de AC.

Unamos os pontos G e E ao ponto F.

A área de AEGF é o dobro da área de ABCD.

Problema 222. — Dado um quadrado, construir outros cujas áreas sejam o dobro, o triplo, o quadruplo, o quintuplo, etc., da área do primeiro.

Seja ABCD o quadrado conhecido (fig. 415).

A área do quadrado AEGH é, como já vimos no problema antecedente, o dobro da do primeiro (ABCD).

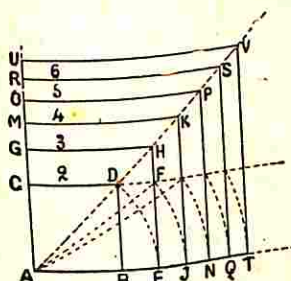
Para obtermos o quadrado de área tripla, prolonguemos o lado CD e, com um raio AF e centro em A, descrevamos o arco FJ. Centro em J e raio egual a JA, cortemos o prolongamento da diagonal AD no ponto K; de A e com o mesmo raio, determinemos o ponto M.

Fig. 415.

Unamos M e J ao ponto K. A área do quadrado AJMK é o triplo da de ABCD.

Procedendo-se sempre do mesmo modo, obteremos quadrados de áreas quadrupla, quintupla, sextupla, etc.

Assim: ANOP = quadruplo de ABCD; AQRS = quintuplo do mesmo quadrado; ATUV = sextuplo do mesmo quadrado ABCD.

Problema 223. — Dado um rectangulo, construir um outro cuja área seja dupla da do primeiro.

Seja A B C D o rectangulo dado (fig. 416).

Prolonguemos o lado A B e sobre A B construamos quadrado A B E F.

Tracemos as diagonaes A F, d'esse quadrado, e A D, do rectangulo dado.

Prolonguemos esta ultima na direcção de A para D.

Façamos centro em A, e com o raio A F tracemos um arco até determinar o ponto G pelo qual levantemos a perpendicular G M.

Fig. 416.

Por este ultimo ponto tracemos a recta H M parallela a A G.

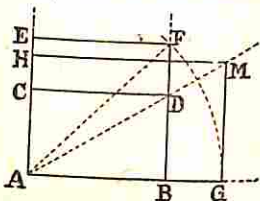
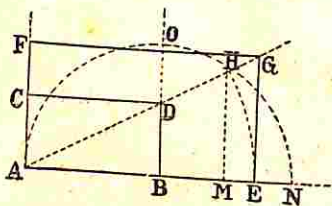
A área do rectangulo A G H M é o dobro da do rectangulo dado.

Problema 224. — Dado um rectangulo, construir um outro cuja área seja o triplo da área do primeiro.

Fig. 417.

Seja A B C D o rectangulo dado (fig. 417).

Prolonguemos os lados A B e B D; tiremos a diagonal A D, prolongando-a na direcção de A para D.

Descrevamos a semi-circumferencia A O N com o centro em B.

Levantemos por M (meio de B N) uma perpendicular até encontrar a semi-circumferencia no ponto H.

Façamos centro em A, e com o raio A H descrevamos o arco H E.

Por este ultimo ponto levantemos uma perpendicular á recta A N até determinar o ponto G, e finalmente tracemos a recta F G parallela a A E.

O rectangulo A E F G tem área tripla da do primeiro A B C D.

Problema 225. — Construir um triangulo equilatero equivalente a um triangulo isosceles.

Seja A B C o triangulo isosceles (fig. 418).

Construamos o triangulo equilatero A B D e tiremos a recta D C F que fórma com A B dois angulos rectos.

Sobre D F como diametro, descrevamos a semi-circumferencia como nos mostra a fig. 418.

Levantemos a perpendicular C E sobre D F e façamos F H = F E.

Do ponto H tracemos H M parallela a D A e H N parallela a D B.

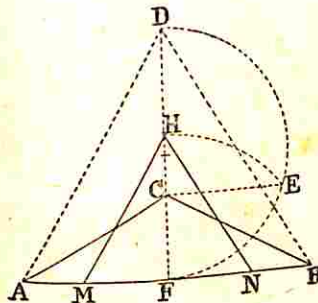



Fig. 418.

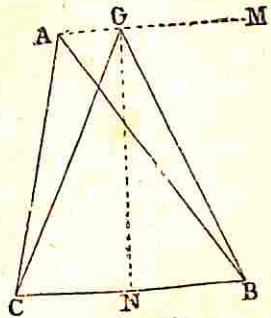
O triangulo M N H é equilatero porque é semelhante ao triangulo A B D.

Do mesmo modo F D : F H = F H : F C porém F D : F H = F A : F M, e o angulo D F A é commum aos triangulos H F M e C F A; logo o triangulo portanto F H : F C = F A : F M, H F M = C F A e por consequencia M N H é equivalente a A B C.

Problema 226. — Construir um triangulo isosceles equivalente a um triangulo dado.

Fig. 419.

Seja C B A o triangulo dado (fig. 419); tracemos A M parallela á base C B.

Pelo meio de C B, levantemos uma perpendicular N G até encontrar A M. Unamos os pontos C e B ao ponto G e obtemos o triangulo isosceles C B G equivalente ao triangulo C B A.

Problema 227. — Construir um triangulo rectangulo equivalente a um triangulo dado.

Seja ABC o triangulo dado (fig. 420); tracemos CM parallela á base AB, levantemos a perpendicular AD e juntemos os pontos D e B. O triangulo rectangulo ABD é equivalente ao triangulo dado ABC, por terem a mesma *base* e a mesma *altura*.

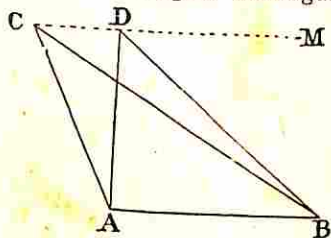



Fig. 420.

Problema 228. — Construir um triangulo rectangulo equivalente a um losango dado.

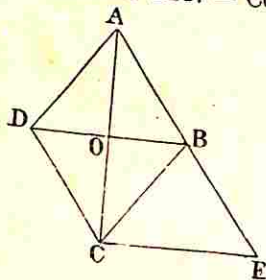



Fig. 421.

Seja ABCD o losango (fig. 421); tracemos CE parallela á diagonal DB e prolonguemos AB até encontrar CE; o triangulo rectangulo ACE é equivalente ao losango, porque este tem para medida da **área** $AC \times OB$ e aquelle tem por medida $AC \times \frac{CE}{2}$; porém $\frac{CE}{2} = OB$ porque, no parallelogrammo CEDB; $CE = DB$

e sendo $\frac{CE}{2} = \frac{DB}{2}$; $\frac{CE}{2} = OB$.

Portanto a **área** do triangulo rectangulo ACE é egual á do losango ABCD.

Problema 229. — Construir um triangulo equivalente a um hexagono regular.

Seja ABCDEF o hexagono regular (fig. 422); prolonguemos o lado AB e a partir do ponto B: sobre esse prolongamento marquemos as distancia B*c*, *cd*, *de*, *ef*, *fg* eguaes cada uma ao lado AB. Unamos o ponto O ao ponto

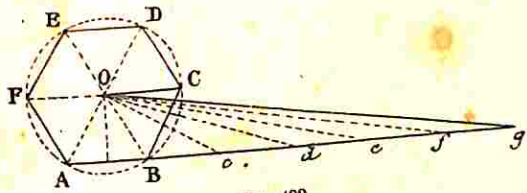



Fig. 422.

g. O triangulo AO*g* é equivalente ao polygono dado, porque se compõem um e outro de seis triangulos equivalentes por terem bases eguaes e a mesma altura.

Problema 230. — Construir um triangulo equivalente a um outro, conhecendo-se a altura.

Seja ABC o triangulo dado (fig. 423).

Centro em A e com um raio egual á altura conhecida descrevamos um arco RX; do ponto B tracemos uma

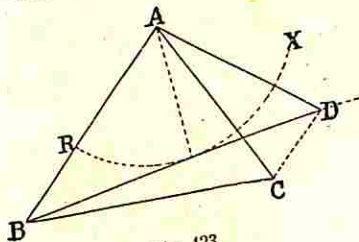



Fig. 423.

tangente a esse arco e do ponto C uma parallela a BA até determinar o ponto D o qual, ligado ao ponto A, resolve o problema.

Problema 231. — Construir um quadrado equivalente um triangulo.

Pelo ponto P, meio do lado AB (fig. 424), levantemos uma perpendicular PR egual á altura do triangulo dado

Formemos o rectangulo P B R S que é equivalente ao triangulo A B C.

Prolonguemos o lado B S de uma quantidade S V egual a S R e do meio de B V descrevamos uma semi-circumferencia.

Prolonguemos R S até N; a recta S N é o lado do quadrado Q (fig. 425), equivalente ao triangulo A B C por ser tambem equivalente ao rectangulo P B R S.

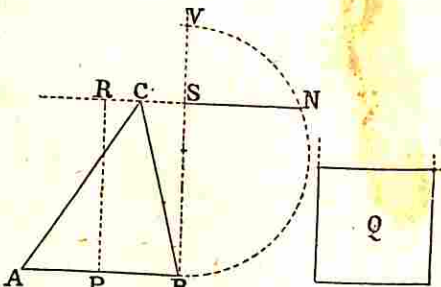



Fig. 424.

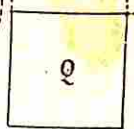



Fig. 425.

Problema 232. — Construir um quadrado equivalente a um rectangulo.

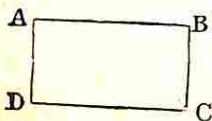



Fig. 426.

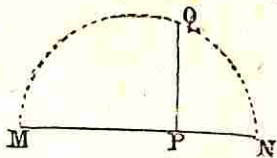



Fig. 427.

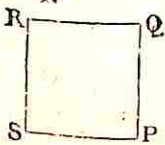



Fig. 428

Seja A B D C o rectangulo (fig. 426.

Procuremos a média proporcional P Q (fig. 427), entre a base D C e a altura C B do rectangulo, e construamos o quadrado P Q R S (fig. 428), tendo para lado P Q.

Este quadrado é equivalente ao rectangulo A B D C porque a proporção

$$MP : PQ :: PQ : PN$$

dá

$$MP \times PN = \overline{PQ}^2$$

ou

$$DC \times CB = \overline{PQ}^2$$

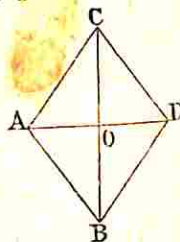
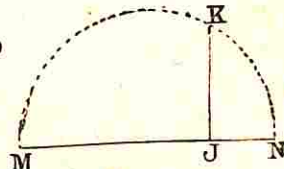
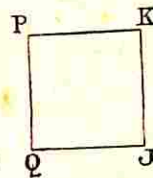
Problema 233. — Construir um quadrado equivalente a um losango.

Seja A C B D o losango (fig. 429). Procuremos a média proporcional J K (fig. 430) entre a diagonal C B e a metade A O da outra diagonal, e construamos o quadrado J K P Q (fig. 431) tendo para lado a média proporcional J K.

Fig. 429.

Fig. 430.

Fig. 431.

Procedamos como no problema antecedente e chegaremos á conclusão de que o losango A C B D é equivalente ao quadrado J K P Q.

Problema 234. — Construir um quadrado equivalente a um parallelogrammo.

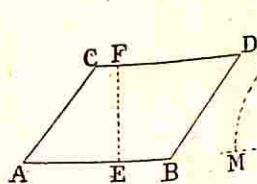



Fig. 432.

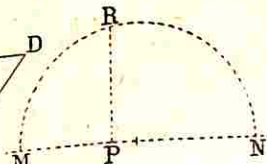



Fig. 433.

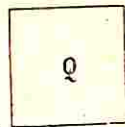



Fig. 434

Sobre uma recta (fig. 433) appliquemos $MP = EF$, (altura do parallelogrammo A B C D) mais $PN = AB$ (fig. 432).

Descrevamos a semi-circumferencia que tem para diametro M N e pelo ponto P levantemos P R perpendicular

á mesma recta. O quadrado Q (fig. 434), traçado com **um** lado $= PR$ é o quadrado pedido, porque :

$$MP : PR = PR : PN$$

portanto

$$\overline{PR}^2 = MP \times PN \text{ ou } EF \times AB$$

Problema 235. — Construir um quadrado equivalente á somma de dois outros.

Tracemos um angulo recto P (fig. 437) e façamos P R egual a um dos lados do quadrado M (fig. 435) e P Q egual a um dos lados do quadrado N (fig. 436).

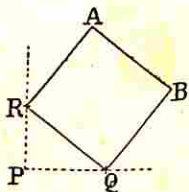



Fig. 435.

Fig. 436.

Fig. 437.

Unamos R a Q e sobre a recta R Q construamos o quadrado R Q A B equivalente a M + N, porque :

$$\overline{RQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{PQ}^2$$

logo

$$RQAB = M + N$$

Problema 236. — Construir um quadrado equivalente á differença de dois outros.

Façamos um angulo recto A (fig. 440) e appliquemos $AB =$ um dos lados do quadrado P (fig. 438).

Centro em B e raio egual a um dos lados do quadrado R (fig. 439) determinemos o ponto C.

Fig. 438.

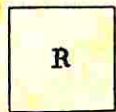



Fig. 439.

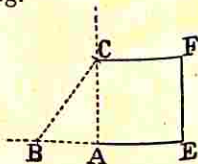



Fig. 440.

Sobre A C construamos o quadrado A C E F equivalente á differença dos dois outros, porque :

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2$$

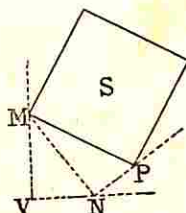
e portanto

$$ACEF = R - P$$

Problema 237. — Construir um quadrado equivalente á somma de varios outros.

Sejam A, B, C tres quadrados (fig. 441, 442, 443).

Tracemos um angulo recto V (fig. 444), e de V até M re-

Fig. 441. Fig 442. Fig. 443. Fig. 444.

produzamos a medida de um dos lados do quadrado A ; em V N a medida de um dos lados do quadrado B.

Unamos M a N ; levantemos pelo ponto N uma perpendicular a M N.

Sobre essa perpendicular, e a partir de N, marquemos N P egual a um dos lados do quadrado C.

Unamos o ponto M ao ponto P e sobre M P construamos o quadrado S (fig. 444) cuja área é egual á somma das áreas dos tres quadrados A, B e C, porque :

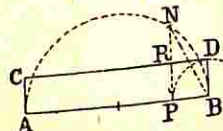
$$\overline{MP}^2 = \overline{NP}^2 + \overline{MN}^2$$

porém

$$\overline{MN}^2 = \overline{VN}^2 + \overline{MV}^2$$

portanto

$$\overline{MP}^2 = \overline{NP}^2 + \overline{VN}^2 + \overline{MV}^2 \text{ ou } C + B + A.$$

Problema 238. — Construir um rectangulo equivalente a um quadrado, sobre uma recta dada.

M é o quadrado (fig. 445) e A B a recta (fig. 446).

Sobre A B, como diametro, descrevamos uma semi-circumferencia.

Fig. 445. Fig. 446.

Do ponto B, como centro, e com o raio egual a um dos lados do quadrado M, marquemos o ponto N do qual abaixemos a perpendicular N P sobre a recta A B.

B P é a altura do rectangulo cuja base é A B e cuja áre é egual á do quadrado M, porque :

$$AP : PN = PN : PB$$

d'onde

$$\overline{PN}^2 = AP \times PB$$

porém

$$AP \times PB = AP \times PR$$

portanto

$$\overline{PN}^2 = APCR$$

ora

$$\overline{PN}^2 \text{ ou } M = \overline{PB}^2 \text{ ou } PBRD + \overline{PN}^2 \text{ ou } APCR$$

mas

$$PBRD + APCR = ABCD$$

logo

$$M = ABCD$$

Problema 239. — Construir um rectangulo equivalente a um losango dado.

Seja B A C D o losango (fig. 447).

Pelos pontos A e C, tracemos as rectas A M e C N parallelas á diagonal D B e pelo ponto B, a recta N M, parallela á diagonal C A.

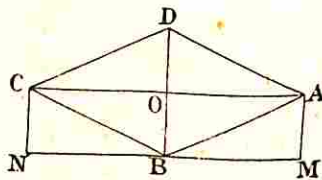



Fig. 447.

O rectangulo N M C A é equivalente ao losango B A C D, porque um e outro têm para medida da **área** $CA \times OB$

Problema 240. — Construir um triangulo equivalente a um rectangulo dado.

Seja A B C D o rectangulo dado (fig. 448); prolonguemos a altura B D de uma quantidade D E egual a B D; unamos entre si os pontos E e A.

O triangulo rectangulo A B E é equivalente ao rectangulo ABCD porque a **área** de um e de outro são eguaes ao producto de A B por B D.

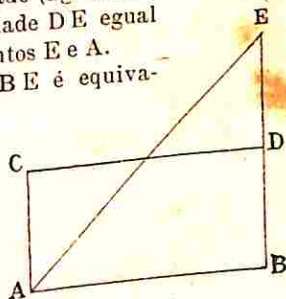



Fig. 448.

Problema 241. — Construir um rectangulo equivalente a um outro, sobre uma recta dada.

Seja A B C D o rectangulo dado (fig. 449).

Sobre o lado A B appliquemos B E egual a recta dada.

Prolonguemos o lado B D e pelo ponto A tiremos uma recta A P parallela a E D.

B P é a altura do rectangulo pedido, isto é, de E B F P.

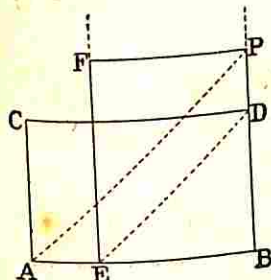



Fig. 449.

Problema 242. — Construir um rectangulo equivalente a um quadrado, sendo a somma de dois lados consecutivos egual a um recta dada.

Seja A B a recta conhecida (fig. 451) e Q o quadrado (fig. 450).

Dividamol-a ao meio e descrevamos a semi-circumferencia.

Levantemos pelo ponto A a perpendicular A P egual a um dos lados do quadrado Q, e pelo ponto P tracemos a recta P M parallela a A B.

Fig. 450.

Fig 451.

Do ponto R abaixemos uma perpendicular á recta A B. S B C D, cuja base S B + a altura C S = A B, é o rectangulo pedido, porque sendo

$$RS = PA;$$

porém

$$\overline{RS}^2 = \overline{PA}^2 = Q$$

logo

$$AS : RS = RS : SB$$

$$\overline{RS}^2 \text{ é equivalente a } AS \times SB$$

Problema 243. — Construir um triangulo equivalente a um parallelogrammo.

Seja A B C D o parallelogrammo (fig. 452).

Por um ponto M tomado na recta A B levantemos uma perpendicular na qual marquemos M N egual ao dobro da altura do parallelogrammo.

Unamos o ponto N aos pontos A e B e teremos o triangulo pedido, porque A B N tem para base a do parallelogrammo e altura dupla; portanto terá a mesma área.

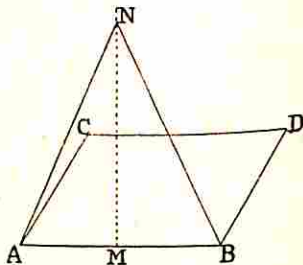



Fig. 452.

Problema 244. — Construir um parallelogrammo equivalente a um quadrado, sendo a differença entre uma de suas bases e a altura egual a uma recta dada.

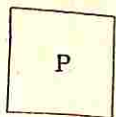
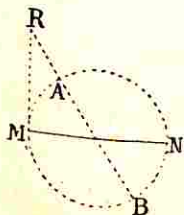



Fig. 453. Fig. 454. Fig. 455.

Seja P o quadrado (fig. 453) e M N a differença entre a base e a altura do parallelogrammo pedido (fig. 454).

Sobre a recta M N, como diametro, descrevamos uma circumferencia.

Pelo ponto M tracemos a tangente M R egual a um dos lados do quadrado P.

Tiremos a recta que, partindo de R, passe pelo centro da circumferencia e determine os pontos A e B.

O parallelogrammo D (fig. 455), que tem para base a recta R B e para altura R A será equivalente ao quadrado P, porque:

$$RB : RM = RM : RA$$

(se de um ponto situado fóra de um circulo traçarmos uma secante e uma tangente, esta será a média proporcional entre toda a secante e o segmento externo)

portanto

$$\overline{RM}^2 \text{ ou } \overline{P}^2 = RB \times RA$$

e a differença entre RB e RA é AB ou MN, isto é, a recta dada.

EXERCICIOS

1. — Zila! que quer dizer medir uma superficie?
2. — Que nome tem a porção limitada de uma superficie?
3. — Qual a unidade de medida das superficies?
4. — Como se divide o metro quadrado?
5. — Quantos decimetros quadrados tem um metro quadrado? — quantos centimetros quadrados? — quantos millimetros quadrados?
6. — Que é necessario para que dois triangulos sejam equivalentes?
7. — Como se avalia a área de um quadrado?
8. — Qual a fórmula?
9. — Que é fórmula?
10. — Qual a área de um quadrado de $0^m,042$ de lado?

11. — Como se avalia a área de um rectangulo?
12. — Qual a fórmula?
13. — A altura de um rectangulo a que é egual?
14. — Qual a fórmula?
15. — A base de um rectangulo a que é egual?
16. — Dá a fórmula.
17. — A área de um rectangulo $= 0^{m2},0024$ e a base mede $0^m,04$; qual a altura?
18. — A área de um rectangulo = 720 millimetros quadrados e a altura mede 6 centimetros; qual a base?
19. — Como se avalia a área de um parallelogrammo?
20. — Como se avalia a área de um triangulo? — qual a fórmula?
21. — Um terreno de fórma triangular mede 80^m de base e $32^m,84$ de altura; qual a sua área?
22. — Um triangulo mede $0^m,08$ de base e $0^m,035$ de altura; qual a sua área?
23. — Os lados de um triangulo medem respectivamente $0^m,072$; $0^m,08$ e $0^m,05$. Qual a área?
24. — Traduze esta fórmula: $\frac{B+b}{2} \times A$.
25. — Como pódes avaliar a área de um polygono irregular? — e a de um polygono regular?
26. — Quaes as fórmulas?
27. — O lado de um quadrado é egual a 16 metros e 52 centimetros; qual a área?
28. — A base de um rectangulo mede 6 metros e a altura $4^m,06$; qual a área d'este rectangulo?
29. — A base de um parallelogrammo é egual ao dobro da altura e a altura é egual a $6^m,003$; qual a área d'este parallelogrammo?
30. — A base de um triangulo $= 30^m,60$ e a altura mede 16 metros; qual a área d'este triangulo?
31. — Um trapezio rectangulo tem 7 metros para uma das bases e 8 metros e meio para a outra e para a altura $3^m,06$; qual a área d'este quadrilatero?
32. — Qual a área de um hexagono regular inscripto em um circulo de raio = 8 centimetros?
33. — Quaes são as figuras circulares?

34. — A que é egual a área de um circulo, quando são conhecidos o raio e a circumferencia?
35. — E quando só é conhecido o raio?
36. — E quando só é conhecida a circumferencia?
37. — Explica a fórmula: $\frac{C^2}{4\pi}$.
38. — A que é egual o raio do circulo?
39. — Como podemos calcular a área de um sector circular?
40. — E a de um segmento circular?
41. — A que é egual a área de uma corôa circular?
42. — Que são figuras equivalentes?
43. — Qual o losango equivalente a um rectangulo que mede $18^{m/m} \times 30^{m/m}$?
44. — Um rectangulo mede $80^{m/m} \times 60^{m/m}$; qual o triangulo equivalente?
45. — $0^m,04$ e $0^m,06$ são as diagonaes de um losango; qual o triangulo equivalente?
46. — Um quadrado mede $0^m,05$ de diagonal; traça um outro cuja área seja o dobro.
47. — Traça um quadrado cuja área seja tripla da de um outro de $0^m,06$ de lado.
48. — Traça um quadrado cuja área seja quatro vezes maior do que a de um outro, inscripto num circulo de $0^m,03$ de raio.
49. — Um rectangulo mede $0^m,08 \times 0^m,04$; traça um outro cuja área seja dupla. Idem seja o triplo.
50. — Faze um triangulo equivalente a um outro, isosceles, cuja base seja egual a $0^m,06$, e um dos lados eguaes meça $0^m,07$.
51. — Os lados de um triangulo são: $0^m,05$; $0^m,04$ e $0^m,045$. Faze um triangulo isosceles equivalente.
52. — 125° é o angulo de um triangulo isosceles cujo lado symetrico mede $0^m,052$; faze um triangulo rectangulo equivalente.
53. — A diagonal maior de um losango $= 0^m,074$, e um dos lados $= 0^m,05$; faze um triangulo rectangulo equivalente a esse losango.
54. — A altura de um triangulo $= 0^m,06$, e a base mede $0^m,05$; traça o triangulo isosceles e depois um quadrado equivalente.
55. — Qual o quadrado equivalente a um losango formado de dois triangulos equilateros eguaes e de $0^m,03$ de lado?

56. — Um quadrado tem para lado $0^m,04$ e outro $0^m,044$. Faze um terceiro cuja área seja egual á somma das áreas dos dois primeiros.

57. — O lado de um quadrado mede $0^m,054$ e a diagonal de um outro $0^m,06$; faze um terceiro cuja área seja egual á differença das áreas dos dois primeiros.

58. — Sobre uma recta de $0^m,043$, fórma um rectangulo equivalente a um quadrado de $0^m,05$ de lado.

59. — Sobre uma recta de $0^m,050$, traça um rectangulo equivalente a um outro de $0^m,040 \times 0^m,06$.

60. — Constroe um rectangulo equivalente a um quadrado de $0^m,048$ de lado, de modo que a somma de dois lados consecutivos do rectangulo seja egual a 60 millimetros.

61. — Qual o lado de um quadrado que tem o mesmo perimetro de um rectangulo de $28^m,80$ de comprimento sobre $12^m,40$ de largura?

62. — Um quadrado tem $46^m,15$ de lado. Qual seria a base de um rectangulo que tivesse a mesma área e 25 metros de altura?

63. — O preço de 529^{cm2} de certo ladrilho collocado, custa 1$250. Qual será o preço do ladrilhamento de uma área quadrada de $260^m,80$ de lado?

64. — Traça um quadrado cuja área seja o dobro da de outro, cujo lado mede $0^m,06$.

65. — Traça um quadrado cuja área seja o **triplo** da de outro, cuja diagonal mede $0^m,08$.

66. — Constroe um quadrado cuja área seja equivalente á somma de dois outros que têm respectivamente para medida dos lados $0^m,04$ e $0^m,03$.

67. — $0^m,06$; $0^m,03$; $0^m,04$ e $0^m,05$ são as medidas dos lados de quatro quadrados. Traça um quinto quadrado cuja área seja egual á somma das áreas dos quatro primeiros.

68. — Faze um rectangulo de $0^m,06$ de comprimento e $0^m,04$ de largura, e sobre a base d'esse quadrilatero traça as seguintes figuras que lhe sejam equivalentes:

a) um triangulo obtusangulo
b) um triangulo rectangulo
c) um triangulo isosceles
d) um quadrado
e) um parallelogrammo.

f) um trapezio symetrico
g) um trapezio rectangulo.

69. — Traça um rectangulo cuja área seja o dobro da de outro de $0^m,06$ de base, $0^m,05$ de diagonal e sendo o angulo formado pela base e diagonal $= 25°$.

70. — Traça um rectangulo cuja área seja o quadruplo da de um outro de $0^m,08$ de base e $0^m,05$ de altura.

71. — Ao redor de uma casa de 8^m de frente e 40^m de fundo, o proprietario quer mandar cimentar uma faixa do terreno, de $1^m,40$ de largura, encostada á casa; quanto gastará elle se o metro quadrado lhe ficar a 6$500?

72. — Qual a área d'este quadro negro? (O professor fará avaliar a área do quadro negro da aula).

73. — Quaes as áreas dos parallelogrammos cujos elementos conhecidos são:

a) Base $= 0^m,04$ Altura $= 0^m,03$
b) » $= 0^m,055$ » $= 0^m,042$
c) » $= 0^m,08$ » $= 0^m,06$
d) » $= 0^m,98$ » $= 0^m,68$
e) » $= 1^m,45$ » $= 0^m,96$
f) » $= 22^{Km},684$ » $= 12^{Km},842$
g) » $= 14$ c/m » $= 306$ c/m
h) » $= 4^{Dm}$ » $= 3^{Hm}$?

74. — O desenho de um campo da fórma de um parallelogrammo está na escala de 1:200.000. As dimensões do desenho são: um lado $= 242$ millimetros e a altura 160 millimetros. Qual a área do campo?

75. — Sobre cada lado de um triangulo equilatero de $0^m,504$ de lado, construamos um quadrado e calculemos a área total das quatro figuras assim formadas.

76. — Um sitio de fórma triangular e medindo 9482 metros de base e 2485 metros de altura foi vendido a 25$400 o área. Quanto custou este sitio?

77. — Sobre uma recta de $0^m,036$ constroe um triangulo qualquer, e depois sobre a mesma recta faze: 1.° um triangulo rectangulo; 2.° um triangulo isosceles equivalentes, cada um, ao primeiro triangulo.

78. — Constroe um triangulo equilatero equivalente a um triangulo isosceles cuja base mede $0^m,04$ e um dos lados symetricos $0^m,06$.

79. — Traça um triangulo rectangulo equivalente a um hexagono regular de $0^m,05$ de lado.

80. — Qual o triangulo equilatero equivalente a um rectangulo de $0^m,08$ de base e $0^m,04$ de altura; sendo a base do triangulo equilatero egual á altura do rectangulo?

81. — Quaes as áreas dos trapezios cujos elementos conhecidos são:

a)	BASE $= 5^m$	Base $= 3^m$	Altura $= 2^m,5$
b)	» $= 6^m$	» $= 5^m$	» $= 3^m$
c)	» $= 32^m$	» $= 20^m$	» $= 6^m$
d)	» $= 346^m$	» $= 165^m$	» $= 84^m$
e)	» $= 112^{Km}$	» $= 88^{Km}$	» $= 50^{Km}$?

82. — Quantos áreos tem um terreno de fórma irregular e que está dividido em quatro triangulos cujas dimensões são: a do 1.° — *base* $= 31^m$, *altura* $= 40^m$; a do 2.° — $b = 65^m$, $a = 40^m$; a do 3.° — $b = 75^m$ e $a = 29^m$, e finalmente a do 4.° — $b = 86^m$ e $a = 55^m$?

83. — Qual é, em **hectáreos**, a área de um campo irregular, dividido em tres triangulos e um trapezio, sendo as dimensões de cada um: o 1.° triangulo 750^m de base e 260^m de altura; o 2.° — $290^m \times 350^m$; o 3.° — $800^m \times 280^m$; o trapezio: $B = 750^m$; $b = 400^m$; $a = 350^m$?

84. — As diagonaes de um losango são eguaes, uma a $0^m,08$ e a outra a $0^m,06$; qual a área d'esse quadrilatero?

85. — Qual a área de um pentagono regular cujo lado mede $22^m,62$?

86. — Qual a área de um pentagono regular inscripto num circulo, cujo raio mede $12^m,30$?

87. — Qual a dimensão do lado de um pentagono regular inscripto num circulo cujo raio mede 50^m?

88. — Qual o apothema de um pentagono regular inscripto um circulo cujo raio mede $20^m,95$?

89. — Qual o perimetro de um hexagono regular inscripto em um circulo de raio $= 22^m,68$?

90. — Que porção de superficie plana póde occupar a base de um tinteiro de fórma hexagonal regular, sendo a aresta d'essa base $= 0^m,03$?

91. — Qual a área de um hexagono regular cujo lado mede $4^m,25$?

92. — Qual a área de um hexagono regular cujo raio do circulo circumscripto mede $0^m,86$?

93. — Qual o apothema de um hexagono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $2^m,50$?

94. — Qual a área de um octogono regular inscripto em um circulo de raio $= 0^m,48$?

95. — Qual a área de um octogono regular cujo lado mede $6^m,32$?

96. — Qual o lado de um octogono regular inscripto em um circulo de raio $= 0^m,965$?

97. — Qual o apothema de um octogono regular inscripto em um circulo de raio $= 16^m,40$?

98. — Qual a área de um decagono regular cujo lado mede $0^m,82$?

99. — Qual a área de um decagono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $0^m,32$?

100. — Qual o lado de um decagono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $0^m,06$?

101. — Qual o apothema de um decagono regular inscript.. em um circulo de raio $= 0^m,08$?

102. — Qual a área de um dodecagono regular cujo lado mede 12 metros?

103. — Qual a área de um dodecagono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $0^m,66$?

104. — Qual o lado de um dodecagono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $6^m,42$?

105. — Qual o apothema de um dodecagono regular inscripto em um circulo cujo raio mede $5^m,46$?

106. — Em um quadrado de $0^m,08$ de lado circuminscreve-se um circulo; qual a área do quadrado fóra do circulo?

107. — No centro de um terreno quadrado de 6 km. de lado mandou-se abrir um tanque circular de 10 m de raio. Quanto resta da área do quadrado?

108. — Um sector circular tem $16^m,50$ de raio e $4^m,80$ de arco. Qual a sua área?

109. — Qual a área de um sector circular cujo arco mede 4 centimetros e o raio $0^m,034$?

110. — Qual a área de um segmento circular de 45° em um circulo de $1^m,20$ de raio?

111. — Qual a área de uma corôa circular limitada por dois circulos cujos raios medem respectivamente $0^m,03$ e $0^m,05$?

112. — Qual a área de uma corôa circular comprehendida entre dois circulos cujos diametros medem respectivamente $6^m,44$ e $7^m,50$?

113. — Qual a área de uma corôa circular formada pelas duas circumferencias, uma inscripta e outra circumscripta a um hexagono regular de $0^m,06$ de lado ?

114. — Traça um rectangulo equivalente a um losango em que uma diagonal é egual a um lado e este tem por medida $0^m,052$.

115. — Constroe um parallelogrammo equivalente a um quadrado sendo a differença entre uma das bases e a altura d'aquelle quadrilatero $= 0^m,112$.

CAPITULO XIII

SUMMARIO : **A linha recta e o plano**

A LINHA RECTA E O PLANO.

Uma *superficie* sobre a qual podemos applicar uma regua perfeita, em todos os sentidos : é *plana* ou é um **plano** (fig. 456).

Uma prancheta, um quadro negro, um espelho mostram *superficies planas* ou **planos.**

Fig. 456.

Todos os pontos de uma **linha recta** traçada em um **plano** estão situados neste **plano.**

A intersecção de dois planos é uma **linha recta.** Tomemos, por exemplo, uma fôlha de papel e dobremol-a : a dobra obtida é uma

linha recta (fig. 457) e cada parte da fôlha de papel é um **plano.**

Uma **recta** póde ser *perpendicular* (fig. 458),

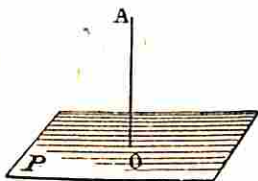



Fig. 457. Fig. 458.

obliqua (fig. 459) ou *parallela* (fig. 460), a um **plano.**

Uma **recta** é perpendicular a um **plano**

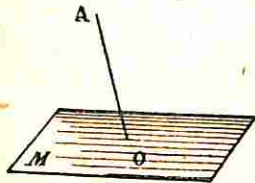



Fig. 459. Fig. 460.

quando é perpendicular a todas as rectas que passam por seu pé nesse plano (fig 461).

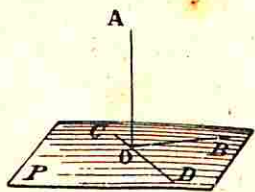



Fig. 461.

Uma **recta** e um **plano** são parallelos quando indefinidamente prolongados não se encontram;

assim, cada uma das linhas que contornam o tampo de uma mesa rectangular é parallela ao soalho.

Dois **planos** são parallelos (fig. 462) quando, prolongados indefinidamente, não se encontram; taes são,

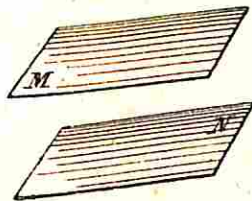



Fig. 462.

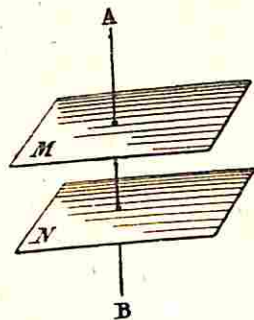



Fig. 463.

por exemplo o tecto e o soalho de uma sala, as faces oppostas de um dado de jogar.

Por um ponto dado em uma recta podemos fazer passar um **plano** perpendicular a essa **recta** e só podemos fazer passar um unico plano.

Dois **planos** perpendiculares a uma mesma recta são parallelos (fig. 463) porque, se não o fossem, teriamos por um mesmo ponto em uma recta dois **planos** perpendiculares á mesma **recta,** o que é impossivel.

Duas rectas perpendiculares a um **plano** são parallelas entre si (fig. 464).

Por uma **linha recta** podemos fazer passar uma infinidade de **planos**; porque, desde que um **plano** passando por uma **recta**, fazemol-o girar ao redor d'essa **recta**, cada posi-

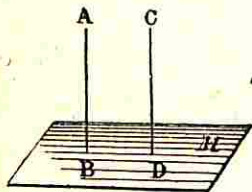
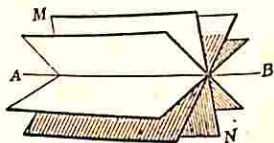



Fig. 464. Fig. 465.

ção que elle toma determina a passagem de um outro **plano** (fig. 465).

Tomemos um cartão de visita e com os indicadores apertemol-o por dois dos cantos oppostos; sopremos brandamente o cartão assim mantido e o veremos girar ao redor do eixo que uniria os dois cantos oppostos : cada nova posição, um novo **plano** passando sempre pela mesma **recta**.

Uma **linha recta** e um ponto situado fóra d'essa **recta** determinam um unico **plano**, porque se um **plano**, contendo uma **recta** e um ponto fóra da **recta**, girar ao redor da

mesma **recta**, conterá sempre o mesmo ponto.

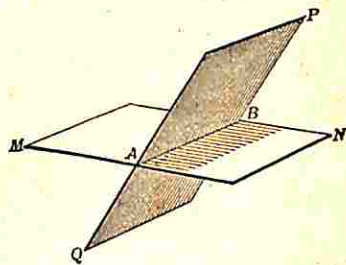
Tres pontos não em linha recta determinam um unico **plano** porque unindo-se dois d'estes pontos ter-se-á uma **recta** e um ponto que, como já ficou dito, determinam um só **plano**.

Duas **rectas** que se cortam determinam um **plano**, porque elle conterá uma d'essas rectas e um dos pontos que marcam a passagem da outra recta; teremos portanto um **plano** determinado por uma recta e um ponto.

Duas **rectas** parallelas tambem determinam um **plano** porque este conterá uma das rectas e um ponto qualquer da outra recta.

Se dois **planos** se cortam, a intersecção é uma *linha recta.*

Fig. 466.

Na fig. 466, MN e PQ cortam-se e a sua intersecção AB é uma **recta** porque, se A e B são dois pontos communs aos dois **planos**, a **recta** AB está situada em cada um d'elles, e se tomarmos um outro ponto qualquer da intersecção,

elle estará forçosamente na **recta** porque, do contrario, por tres pontos não em linha recta poder-se-ia fazer passar dois **planos**, o que é impossivel.

As intersecções de dois **planos** parallelos, produzidas por um terceiro **plano**, são parallelas entre si.

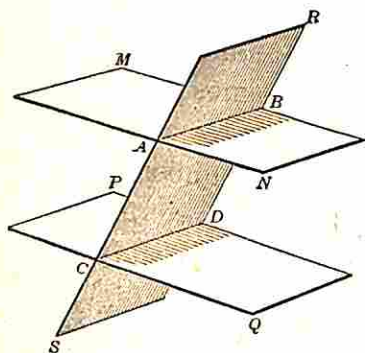



Fig. 467.

Com effeito A B e C D (fig. 467) não se podem encontrar porque os **planos** MN e PQ, nos quaes ellas se acham, não se encontram por serem parallelos, além d'isso A B e C D estão no mesmo **plano** R S; estas duas rectas são portanto parallelas.

EXERCICIOS:

1. — Sarah! mostra um plano.
2. — Que é um plano?
3. — Plano e superficie plana são a mesma cousa?
4. — Esta face do quadro negro será um plano
5. — Traça no quadro negro uma recta.
6. — Dize o que sabes em relação á recta em um plano.

7. — Que é uma recta perpendicular a um plano?
8. — Quando é, uma recta, parallela a um plano?
9. — Que são planos parallelos?
10. — Mostra dois planos parallelos.
11. — Dous planos perpendiculares a uma recta, que são entre si?
12. — Duas rectas perpendiculares a um plano, que são entre si?
13. — Quantos planos podemos fazer passar por uma recta?
14. — Por uma recta e um ponto fóra d'essa recta podemos fazer passar um plano? — Quantos?
15. — Quantos planos poderão passar por tres pontos não em linha recta?
16. — Quantos planos determinam duas rectas que se cortam?
17. — E duas rectas parallelas? — porque?
18. — Que é a intersecção de dois planos?
19. — Mostra dois planos parallelos.
20. — O soalho e o tecto são planos parallelos?
21. — A parede e o soalho que são entre si?
22. — Dá exemplo de planos passando por uma recta

CAPITULO XIV

SUMMARIO : **Angulos diédros. — Angulos solidos ou polyédros.**

Quando dois planos se encontram, formam

ANGULOS DIEDROS.

um **angulo diédro.** Geralmente os telhados das casas formam um **angulo diédro.**

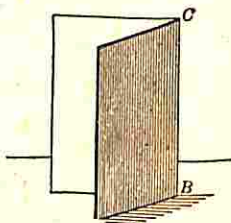
Em um **angulo diédro** consideramos dois planos, que são as *faces;* e a *aresta,* a recta onde estes planos se encontram.

Fig. 468.

Designamos um **angulo diédro** por duas lettras collocadas na *aresta*

Exemplo :

O angulo diédro CB (fig. 468).

Ou por quatro lettras, ficando as duas da *aresta* no meio.

Exemplo :

O angulo diédro M-AB-N (fig. 469).

Conforme o afastamento ou approximação dos planos que formam um **angulo diédro,** este se torna maior ou menor.

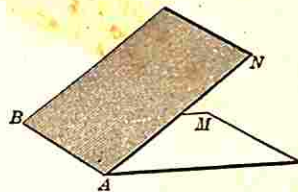



Fig. 469.

Para conhecermos com exactidão a grandeza de um **angulo diédro** levantamos, em cada um dos planos e de um ponto da *aresta,* uma perpendicular á mesma aresta.

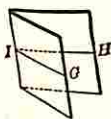



Fig. 470.

O angulo resultante é chamado **angulo plano** e mede o diédro; tal é o angulo HIG (fig. 470).

Os **angulos diédros** são :

rectos
agudos
obtusos.

O **angulo diédro** *recto* é formado por dois planos perpendiculares entre si.

Exemplo :

O **angulo diédro** C-AB-D (fig. 471) é *recto,* porque o plano C é perpendicular ao plano D.

Quando um plano cae sobre outro obliquamente, fórma dois **angulos diédros**; um *agudo* e outro *obtuso*. Exemplo :

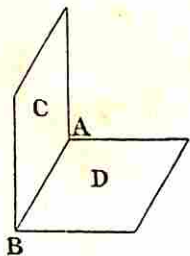



Fig. 471.

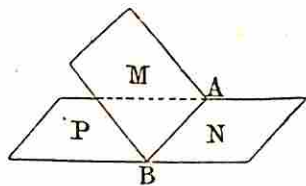
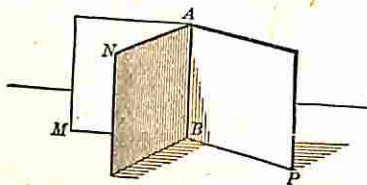



Fig. 472.

O angulo diédro M-AB-P (fig. 472) é *agudo* e o angulo diédro M-AB-N é *obtuso*.

Se dous **diédros** têm uma *aresta* e uma *face*, communs são *adjacentes*.

Fig. 473.

O angulo M-AB-N é adjacente ao angulo N-AB-P (fig. 473).

Dois **diédros** são *eguaes* quando, collocados um sobre o outro, coincidem em todos os seus pontos.

Dois **diédros** oppostos pela aresta são eguaes.

Se dois planos que se cortam são, cada um

perpendicular a um terceiro plano, a intersecção dos dois primeiros é tambem perpendicular a este ultimo.

Os planos C e D (fig. 474) são perpendicu-

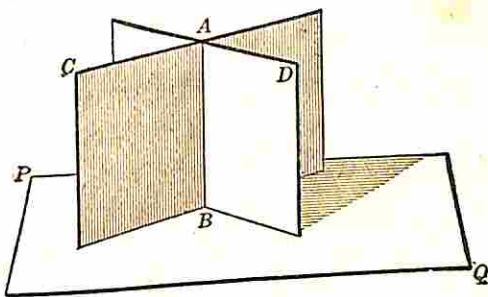



Fig. 474.

lares ao plano PQ; a recta AB, que é a intersecção é tambem perpendicular ao mesmo plano.

ANGULO SOLIDO OU POLYÉDRO.

O **angulo solido** é formado por mais de dois planos que concorrem em um ponto chamado *vertice*. Estes planos chamam-se *faces* e o encontro de duas faces chama-se *aresta*.

Um **angulo polyédro** contém tantos angulos diédros quantos são os planos concorrentes.

Assim, por exemplo : o **angulo polyédro** S-ABCD (fig. 475) é formado por quatro planos SAB, SBC, SCD e SDA, e contém quatro angulos diédros: A-SB-C cuja aresta é SB; B-SC-D cuja aresta é SC; C-SD-A cuja aresta é SD e finalmente D-SA-B, cuja aresta é SA.

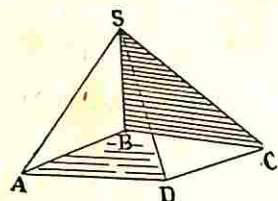



Fig. 475.

Um **angulo polyédro** denomina-se *triédro, tetraédro, pentaédro,* etc., quando é formado por *tres, quatro, cinco faces.*

Dois **angulos polyédros** são *eguaes* quando seus angulos e faces correspondentes são eguaes e dispostos na mesma ordem; taes são os angulos S-ABC e S′-A′B′C′ (fig. 476).

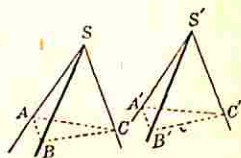



Fig. 476.

EXERCICIOS

1. — Julia! que é um angulo diédro?
2. — Mostra um angulo diédro.
3. — Desenha um angulo diédro.

4. — Como designamos um angulo diédro?
5. — Exemplo.
6. — Como se dividem os angulos diédros?
7. — Que é um angulo diédro recto? — agudo? — obtuso?
8. — Que é um angulo plano?
9. — Que propriedade tem o angulo plano?
10. — Traça um angulo plano.
11. — Que são angulos diédros adjacentes?
12. — Quando são eguaes dois diédros?
13. — Dois angulos diédros oppostos pela aresta, que são?
14. — Que é um angulo solido?
15. — Como se chamam os planos que fórmam um angulo polyédro?
16. — Como se chama o encontro de dous planos de um angulo solido?
17. — Qual é o vertice de um angulo polyédro?
18. — Quantos angulos diédros contém um angulo polyédro?
19. — Que é um angulo triédro? — tetraédro? — pentaédro?
20. — Quando são eguaes dois angulos polyédros?
21. — Ha, na classe, dois angulos polyédros eguaes?
22. — Mostra dois, tres, quatro angulos triédros eguaes.

———

CAPITULO XV

SUMMARIO: **Polyédros.**

Entre os volumes notamos que uns são limitados por superficies planas assim, por

POLYÉDROS.

exemplo, um dado de jogar, os cristaes naturaes, um tijolo, uma regua, etc.; e outros são limitados por superficies curvas assim, por exemplo, uma bola, um ovo, um limão, um tubo, etc.

Os volumes limitados por superficies planas chamam-se **polyédros.**

A recta tirada do centro de um polyédro ao meio de uma face é o **apothema** do polyédro.

Em um **polyédro** consideramos :

as *faces*
as *arestas*
os *vertices*

No tijolo A G (fig. 477), A é um *vertice*, A B é uma *aresta* e B C D G é uma *face*.

As *faces* são os planos que formam o **polyédro**; as *arestas* são as intersecções de dois planos; os *vertices* são os encontros, isto é, os pontos de convergencia das *arestas*.

Fig. 477. — Um tijolo: um polyédro.

Um **polyédro** póde ser *regular* ou *irregular*.

Se as *faces* são polygonos regulares eguaes e todos os angulos solidos tambem eguaes entre si, o **polyédro** é *regular*.

Exemplo :

Um hexaédro regular ou cubo.

Se as faces são deseguaes e os angulos solidos tambem deseguaes, o **polyédro** é *irregular*.

Os **polyédros** *regulares* são cinco, sendo tres formados por triangulos equilateros :

o **tetraédro** *regular*
o **octaédro** *regular*
o **icosaédro** *regular*

Um formado por quadrados :

o ***hexaédro*** *regular* ou *cubo*

Um formado por pentagonos regulares

o ***dodecaédro*** *regular*

Os principaes **polyédros** irregulares são:

o ***prisma***

a ***pyramide***

Exceptuam-se o ***cubo*** e o ***tetraédro*** regular.

Segundo o numero de *faces*, um **polyédro** recebe o nome particular de:

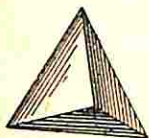



Fig. 478. — Tetraedro regular.

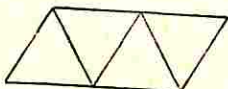



Fig. 479. — Planificação de um tetraédro.

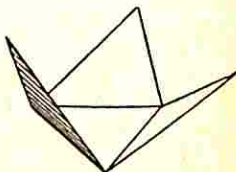



Fig. 480.

Tetraédro se tem quatro faces (figs. 478, 479 e 480).

Pentaédro se tem cinco faces (figs 481 e 482.

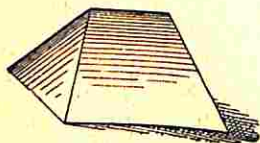



Fig. 481.

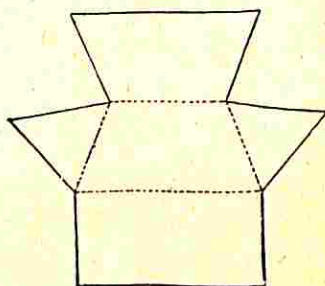



Fig. 482.

Hexaédro se tem seis faces (figs. 483, 484 e 485).

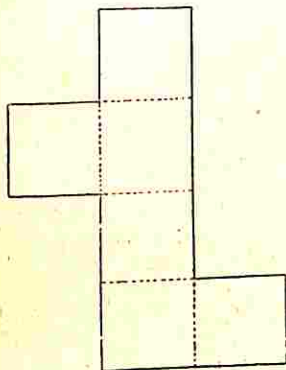



Fig. 483. — Cubo.

Fig. 484. — Planificação de um cubo.

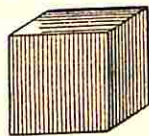
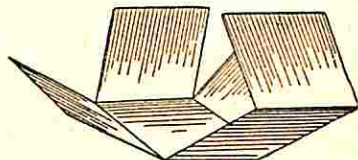



Fig. 485. — Formação de um cubo em cartão.

Heptaédro se tem sete faces (figs. 486 e 487).

Octaédro se tem oito faces (figs. 488, 489).

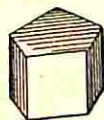



Fig. 486. Heptaédro.

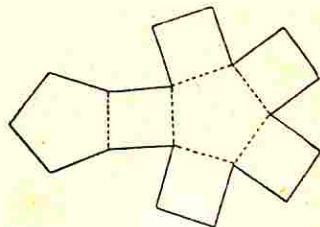



Fig. 487. — Planificação de um heptaédro.

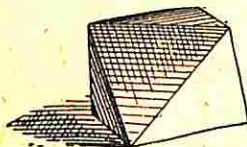



Fig. 488. — Octaédro.

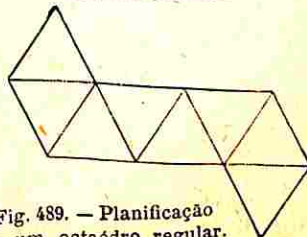



Fig. 489. — Planificação de um octaédro regular.

Dodecaédro, se tem doze faces (figs. 490 e 491).

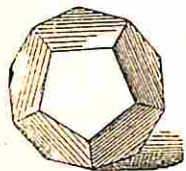



Fig. 490. Dodecaédro.

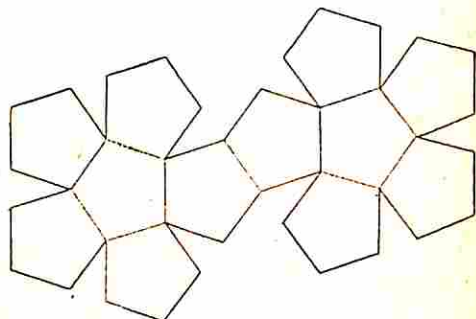



Fig. 491. — Planificação de um dodecaédro.

Icosaédro, se tem vinte faces (figs. 492 e 493).

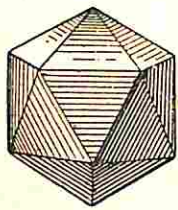



Fig. 492. Icosaédro regular.

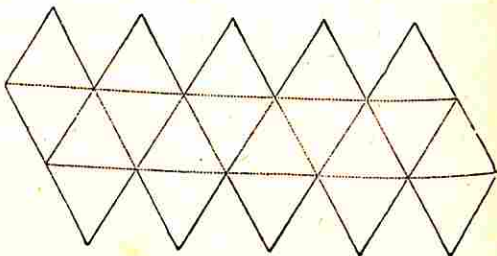



Fig. 493. — Planificação de um icosaédro regular.

Do *tetraédro* regular e do *cubo* se deriva uma série de polyédros chamados *symetricos* (*), por serem todos os planos que os formam, symetricamente dispostos.

(*) *Dois pontos são symetricos* : 1.° — Em relação a um terceiro *ponto*, isto é, em relação a um *centro*, quando este ultimo ponto está no meio da recta que une os primeiros ; 2.° — Em relação a uma *recta* quando esta linha é perpendicular ao meio da recta que une os dous pontos (a recta toma o nome de *eixo de symetria*, (fig. 494 ; 3.° — Em relação a um *plano* quando este plano é perpendicular ao meio da recta que une os dous pontos (fig. 495).

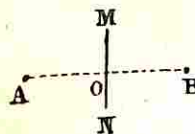
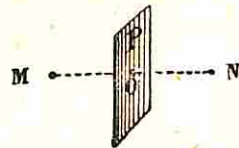



Fig. 494.

Fig. 495.

Se cortarmos um *tetraédro* regular, de sorte que cada secção seja parallela a uma face e equidistante do vertice, obteremos um *octaédro* irregular, formado por quatro hexagonos regulares eguaes e quatro triangulos equilateros tambem eguaes (figs. 496 e 497).

Fig. 496.

Fig. 497.

Se cortarmos todas as arestas de um *cubo*, obteremos um **polyédro** irregular symetrico de dezoito faces, sendo seis quadrados eguaes

e doze hexagonos irregulares eguaes (figs. 498 e 499).

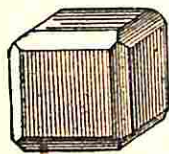



Fig. 498.

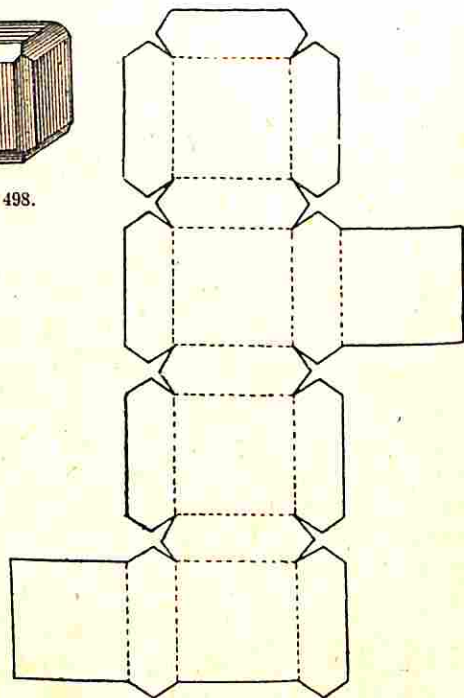



Fig. 499.

Se a partir de cada vertice de um *cubo* cortarmos este *cubo* de modo que todas as secções sejam triangulos equilateros eguaes e equidistantes do vertice; resultará um **polyédro** irregular symetrico de quatorze faces

sendo seis octogonos eguaes e oito triangulos equilateros eguaes (figs. 500 e 501).

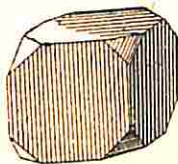



Fig. 500.

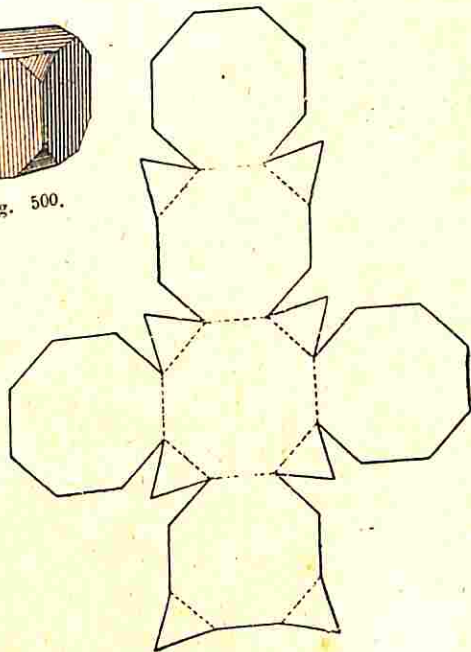



Fig. 501.

Se dividirmos ao meio todas as arestas de um *cubo*, unirmos os meios dos lados adjacentes de cada face e seccionarmos o cubo segundo as rectas traçadas, resultará um outro **polyédro** de quatorze faces

formado de seis quadrados eguaes e oito triangulos equilateros eguaes (figs. 502 e 503).

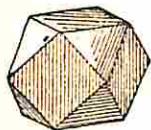
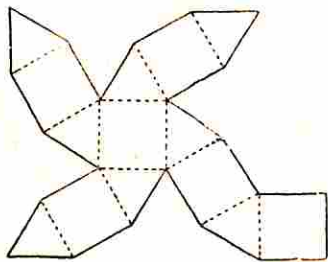



Fig. 502. Fig. 503.

Ainda, do *cubo* podemos formar um outro **polyédro** de quatorze faces sendo, oito hexa-

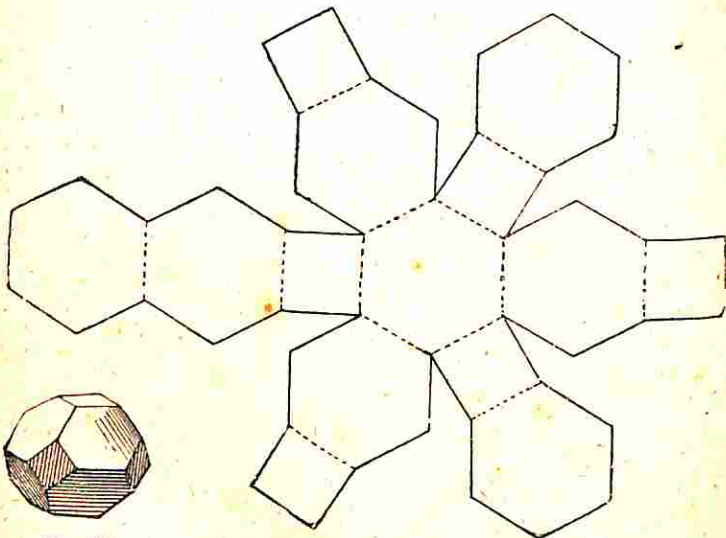



Fig. 504. Fig. 505.

gonos regulares eguaes e seis quadrados eguaes (figs. 504 e 505). Do **polyédro** de dezoito faces (fig 498) formamos um outro

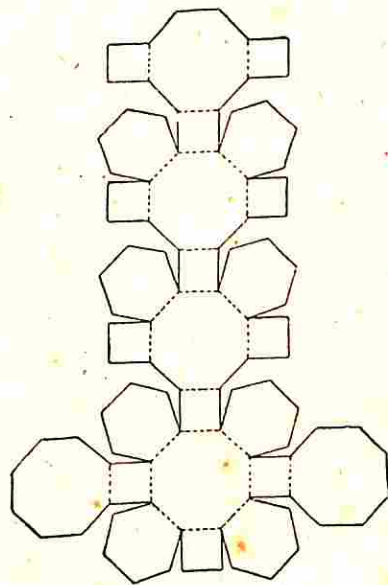



Fig. 506. Fig. 507.

de vinte e seis faces sendo seis octogonos regulares eguaes, oito hexagonos regulares eguaes e doze quadrados eguaes (figs. 506 e 507).

EXERCICIOS

1. — Dario! quantas superficies tem esta caixa?
2. — São curvas ou planas?
3. — Que nome tem um volume limitado por superficies planas?
4. — Exemplos.
5. — Mostra as arestas d'esta regua; — as faces; — os vertices.
6. — Como se chama um polyédro de quatro faces? — de cinco? — de seis? — de sete? — de oito? — de doze? — de vinte?
7. — Que é um polyédro regular?
8. — Exemplos.
9. — Que é um polyédro irregular?
10. — Que outro nome tem o hexaédro regular?
11. — De que especie de polygonos é formado o octaédro regular?
12. — Quaes os principaes polyédros irregulares?
13. — Faze em papel a planificação de um cubo; — de um tetraédro regular; — de um octaédro regular.
14. — Quando dous pontos são symetricos?
15. — Que é eixo de symetria?
16. — As faces de um cubo são eguaes? — que são?
17. — As faces de um tetraédro regular são eguaes?
18. — Quantos angulos triédros em um cubo? — em um traédro?
19. — Que objectos pódem ter a fórma cubica?
20. — Que objectos pódem ter a fórma de um tetraédro?
21. — Conheces alguns objectos de fórma prismatica?
22. — Já viste uma pyramide?
23. — As pyramides do Passeio Publico são triangulares?
24. — Dá-me algum exemplo de pyramide.
25. — Faze em cartão um prisma.
26. — Faze em cartão uma pyramide.
27. — Idem um cubo de $0^m,06$ de aresta.

28. — Idem um tetraédro regular de $0^m,08$ de aresta.
29. — Idem um octaédro regular de $0^m,07$ de aresta.
30. — Idem um icosaedro regular de $0^m,04$ de aresta.
31. — Idem um dodecaédro regular de $0^m,03$ de aresta.
32. — Traça em cartão todas as planificações que vês nest capitulo.

CAPITULO XVI

SUMMARIO : **Prisma. — Pyramide.**

O polyédro irregular cujas faces extremas são polygonos eguaes e **PRISMA.** parallelos, e as lateraes são parallelogrammos, chama-se **prisma** (figs. 508 e 509).

Os polygonos eguaes são as *bases* do

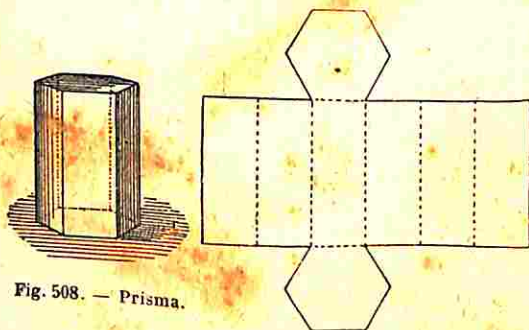



Fig. 508. — Prisma.

Fig. 509.

prisma e os parallelogrammos formam a *superficie lateral*.

As *bases* [illegible] a *superficie lateral* formam a *superficie tot*[illegible].

Um **prisma** é *recto* quando suas arestas lateraes são perpendiculares á base (fig. 508),

Fig. 510.

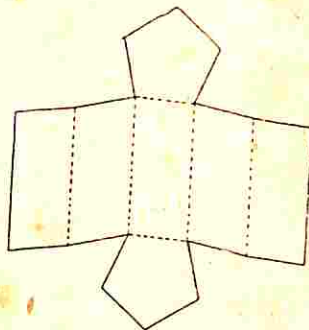



Fig. 511.

e é *obliquo* quando suas arestas lateraes não são perpendiculares á base (figs. 510 e 511).

Fig. 512.

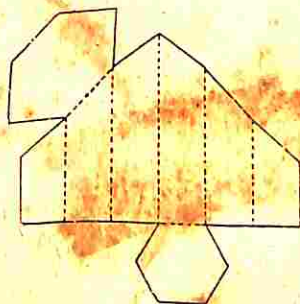



Fig. 513.

Á porção de um **prisma** *recto* ou *obliquo* comprehendida entre uma *base* e uma secçã

não parallela á *base* dá-se o nome de **prisma** *truncado* ou *tronco* de **prisma** (figs. 512, 513, 514 e 515).

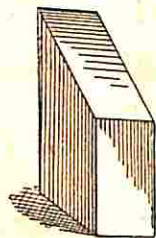



Fig. 514.

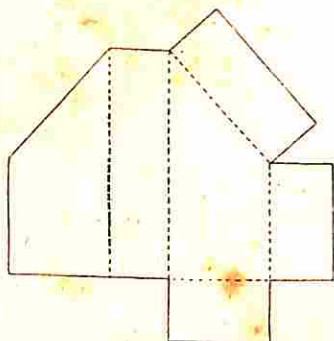



Fig. 515.

A perpendicular abaixada de um ponto qualquer da base superior sobre a base inferior ou sobre o seu prolongamento é a *altura* do **prisma.**

Fig. 516. Prisma triangular.

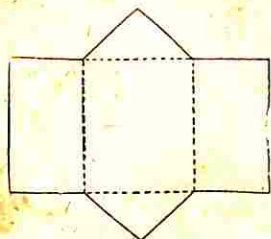



Fig. 517. Planificação do prisma.

Se um **prisma** tem por bases dois *triangulos*, é *triangular* (figs. 516 e 517); dois *qua-*

drilateros, é *quadrangular* (figs. 518 e 519);

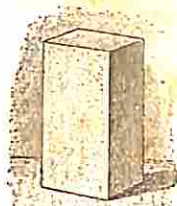



Fig. 518. — Prisma quadrangular.

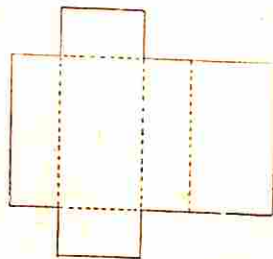



Fig. 519. — Planificação do prisma quadrangular.

dois *pentagonos*, é *pentagonal* (figs. 520 e 521), etc.

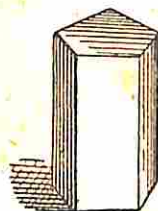



Fig. 520. — Prisma pentagonal.

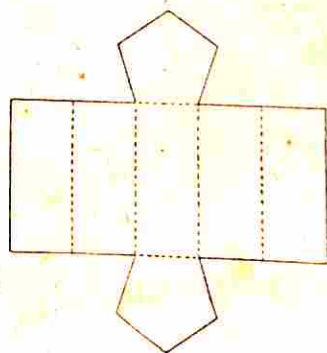



Fig. 521. — Planificação do prisma pentagonal.

Se as bases são parallelogrammos, o **prisma** recebe o nome de ***parallelepipedo.***

As pedras com que geralmente calçam as ruas da cidade têm a fórma de parallelepipedos.

Um ***parallelepipedo*** é *recto* quando as *arestas* são perpendiculares ás *bases* (fig. 518); e é *obliquo* quando as *arestas* são obliquas ás bases (figs. 522 e 523).

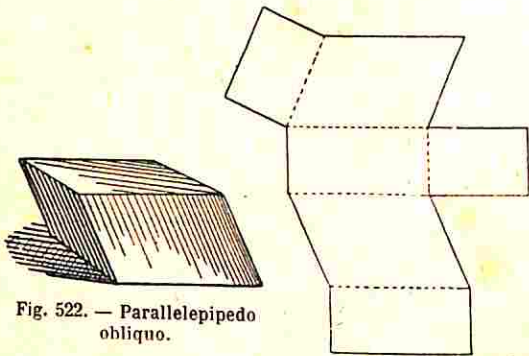



Fig. 522. — Parallelepipedo obliquo.

Fig. 523. — Planificação do parallelepipedo obliquo.

Se um parallelepipedo recto tem a base rectangular, toma o nome de ***parallelepipedo*** *rectangulo*.

Chama-se ***secção recta*** de um **prisma,** o *córte* feito por um plano perpendicular ás faces lateraes do **prisma.**

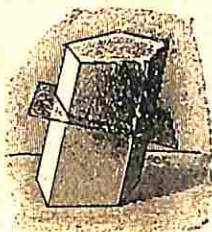



Fig. 524.

O polyédro limitado por um angulo solido e por um plano, chama-se *pyramide* (figs. 525 e 526).

PYRAMIDE.

O plano é a *base*, e o angulo solido é a *superficie lateral* da **pyramide.**

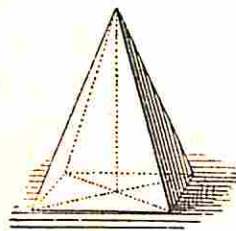



Fig 525. — Pyramide.

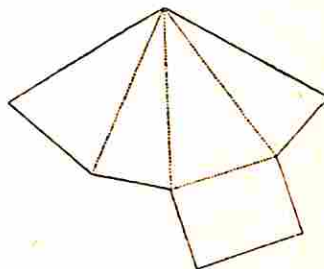



Fig. 526. — Planificação de uma pyramide.

Em uma **pyramide,** consideramos :

o *vertice*
a *base*
as *faces lateraes*
as *arestas*

O *vertice* é o ponto d'onde partem os planos triangulares que formam a superficie lateral da **pyramide.**

A *base* é o polygono sobre o qual assenta a **pyramide.**

As *faces* lateraes são os planos triangulares.

As *faces* e a *base* formam a *superficie total*.

A juncção de duas faces determina uma *aresta* da **pyramide**.

A perpendicular abaixada do vertice sobre a *base* ou sobre o seu prolongamento é a *altura* da **pyramide** (fig. 527).

Uma **pyramide** é ***recta*** (fig. 525) quando a perpendicular que determina a *altura* cae no centro da *base*, e é ***obliqua*** (figs. 527 e 528) quando a perpendicular abaixada do vertice cae fóra do centro.

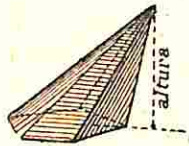



Fig. 527. — Pyramide obliqua.

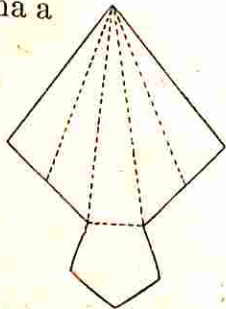



Fig. 528. — Planificação da pyramide obliqua.

Quando uma **pyramide** tem por base um polygono regular e a perpendicular abaixada do *vertice* cae no centro da *base*, é ***regular***.

Em uma **pyramide** *regular* as *faces* são triangulos isosceles eguaes.

A perpendicular abaixada do *vertice* sobre um dos lados da *base* é o ***apothema*** da **pyramide**.

Uma **pyramide** é triangular, quadrangular, pentagonal, etc., se a *base* é um triangulo, um quadrilatero, um pentagono, etc.

A porção de uma **pyramide** comprehendida entre a base e uma secção feita por um plano parallelo ou não á base chama-se ***tronco*** de **pyramide** (figs. 529 e 530).

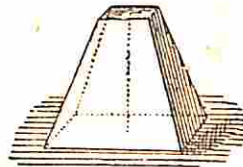



Fig. 529.
Tronco de pyramide.

Fig. 530.
Planificação
do tronco de pyramide.

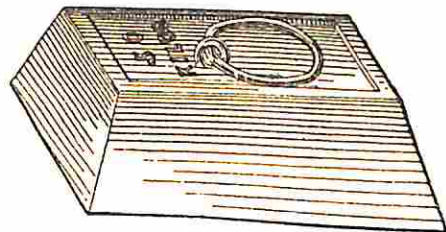



Fig. 531.

Um peso (fig. 531) tem algumas vezes a fórma de um *tronco* de **pyramide**.

Se o plano é parallelo á *base*, a **pyramide**

é *truncada* parallelamente á *base* (fig. 529); e

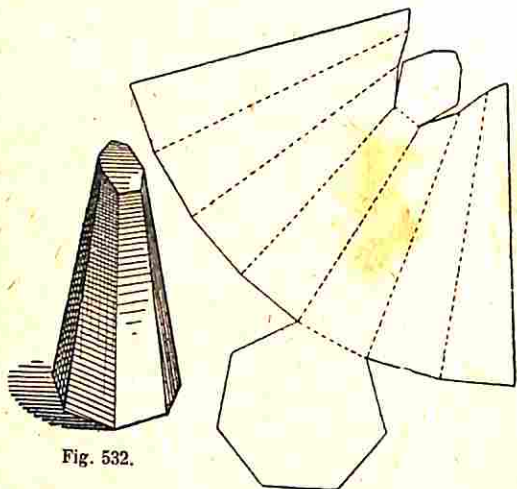



Fig. 532.

Fig. 533.

se o plano é obliquo, a **pyramide** é *truncada* obliquamente (figs. 532 e 533).

EXERCICIOS

1. — Carlinhos! que é um prisma?
2. — Mostra as bases de um prisma; — a área lateral.
3. — A que é egual a área total de um prisma?
4. — Quando é que um prisma é recto? — obliquo?
5. — Mostra a altura de um prisma.
6. — Que é a altura de um prisma?
7. — Que nome tem o prisma cuja base é um triangulo? — um trapezio? — um losango?
8. — Que é um prisma pentagonal? — octogonal?

9. — Quando é que um prisma recebe o nome de parallelepipedo?
10. — Que é um parallelepipedo recto?
11. — Que é um parallelepipedo rectangulo?
12. — Que é uma secção recta?
13. — Como se chama o polyédro limitado por um angulo solido e um plano?
14. — Qual a base?
15. — Qual a area lateral? — área total?
16. — Que nome tem a perpendicular abaixada do vertice sobre a base ou sobre o seu prolongamento?
17. — Que é uma pyramide recta? — obliqua?
18. — Se a pyramide tem por base um polygono regular e para altura a perpendicular abaixada do vertice sobre o centro da base, que é?
19. — Neste caso que são as faces da pyramide?
20. — Qual o apothema de uma pyramide?
21. — Que é uma pyramide pentagonal? — icosagonal?
22. — Que é um tronco de pyramide?
23. — Que é uma pyramide truncada parallelamente á base? — truncada obliquamente?

Faze em cartão:

24. — Um prisma recto de base triangular regular, tendo 4 cm. de altura 2 cm. de aresta da base.
25. — Idem, de base quadrangular regular (alt. = 4 cm., 5 e lado da base = 3 cm.).
26. — Idem, de base hexagonal regular (alt. = 5 cm. e aresta da base = 2 cm.
27. — Idem, de base pentagonal regular (alt. = 5 cm. e aresta da base 2 cm.).
28. — Idem, de base octogonal regular (alt. = 6 cm. e aresta da base = 2 cm., 8.
29. — Uma pyramide triangular regular (aresta lat. = 6 cm. e aresta da base = 3 cm.).
30. — Idem, quadrangular regular (aresta lat. = 6 cm. e aresta da base = 2 cm., 5.
31. — Idem, pentagonal regular (aresta lat. = 8 cm. e aresta da base = 3 cm).
32 — Um tronco de pyramide quadrangular, de bases parallelas (aresta da base maior = 2 cm., 5 aresta lateral do tronco = 4 cm.; aresta lateral da pyramide = 7 cm.).

CAPITULO XVII

SUMMARIO : **Corpos redondos.**

Em geometria elementar estudamos unicamente os tres seguintes **corpos redondos** :

CORPOS REDONDOS. o *cylindro*
o *cône*
a *esphera.*

O **cylindro** é limitado por duas superficies planas e uma superficie curva.

O **cône** é limitado por duas superficies : uma plana e outra curva.

A **esphera** é limitada por uma superficie curva.

CYLINDRO

O corpo produzido pela revolução de um rectangulo girando em torno de um de seus lados é um **cylindro recto** de base circular.

Um lapis, um poço, um tubo de borracha

ou de chumbo, uma chaminé têm geralmente a fórma de um **cylindro.**

As *bases* do **cylindro** são os circulos descriptos pelos lados do rectangulo.

A menor distancia das duas *bases* é a *altura.*

A recta que une os centros das duas *bases* chama-se *eixo.*

A *geratriz* descreve uma superficie convexa que é a *superficie lateral* do **cylindro.**

Fig. 534. — Cylindro recto de base circular.

A superficie lateral e as bases formam a *superficie total.*

ABDC é o rectangulo gerador (fig. 534).

BC é o eixo.

AD é a geratriz

AB e DC produzem as bases do **cylindro.**

O **cylindro** é *recto* (fig. 534) quando o *eixo* é perpendicular ás bases, e é *obliquo* (fig. 535) quando o *eixo* é obliquo ás bases. No

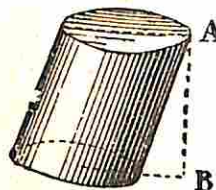
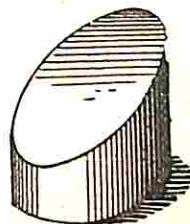



Fig. 535.

Fig. 536.

cylindro *obliquo* (fig. 535) a recta AB é a *altura*. A porção de um **cylindro** comprehendida entre uma *base* e uma secção não parallela á base, chama-se *tronco* de **cylindro** (fig. 536).

CÔNE

O corpo produzido pela revolução de um triangulo rectangulo, girando em torno de um dos lados do angulo recto, é um **cône recto** de base circular.

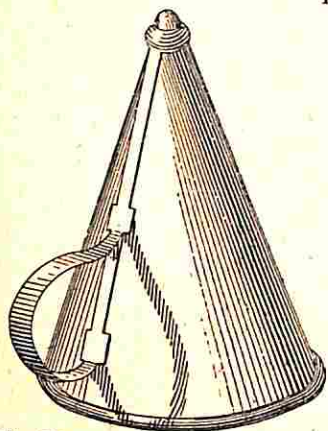



Fig. 537. — Apagador de velas : cône.

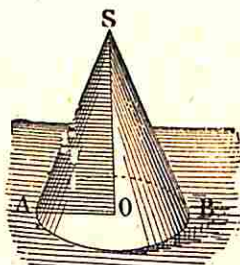



Fig. 538. — Cône recto de base circular.

Um funil, um pão de assucar, um apagador de velas (fig. 537) têm a fórma conica.

O circulo descripto pelo lado OA (fig. 538) do triangulo SOA é a *base* do **cône.**

O lado SO do triangulo SOA é a *altura* ou o *eixo*.

S é o *vertice*.

A hypothenusa SA do triangulo SOA é a *geratriz* ou o *apothema*, e a superficie convexa descripta pela geratriz SA é a *superficie lateral* do **cône.**

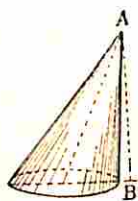



Fig. 539.

Um **cône** é *recto* quando o *eixo* é perpendicular ao centro da *base* (fig. 538), e é *obliquo* quando o *eixo* é obliquo á *base* (fig. 539).

A porção do solido comprehendida entre a base e uma secção feita por um plano parallelo ou obliquo á base, é um *tronco* de **cône.**

Um balde (fig. 540), um dedal, uma leiteira (fig. 541) têm geralmente a fórma de um **cône** *truncado*.

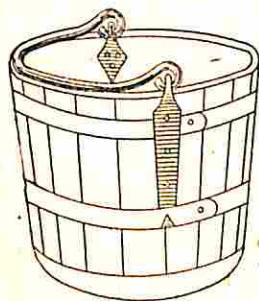



Fig. 540. — Um balde : tronco de cône.

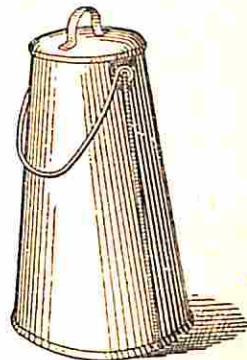



Fig. 541. — Uma leiteira : tronco de cône.

O *tronco* de **cône** *recto* é tambem considerado como um solido produzido pela revolução de um trapezio rectangulo girando ao redor do lado perpendicular ás bases (fig. 542). Este lado do trapezio é o *eixo* do ***tronco*** de **cône.**

As intersecções de um **cône** *recto* por um plano chamam-se *secções conicas.*

Toda secção feita em um **cône** por um plano

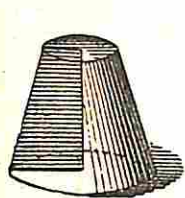
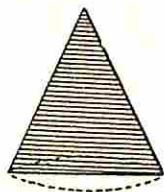



Fig. 542. Fig. 543. Fig. 544.

perpendicular ao *eixo* é um ***circulo*** (fig. 543). Toda secção feita por um plano acompanhando o *eixo* é um ***triangulo isosceles*** (fig. 544).

A secção feita por um plano obliquo ao *eixo* determina uma **ellipse** (*), uma ***parabola*** ou uma ***hyperbole.***

Se o plano corta todas as *geratrizes*, a

(*) Vède capitulo XXI.

secção é uma ***ellipse*** (fig. 545); se corta uma *geratriz* e é parallelo a uma outra, a secção feita é uma ***parabola*** (fig. 546); e finalmente se o plano corta uma *geratriz* e não é parallelo a nenhuma outra, a secção é uma ***hyperbole*** (fig. 547).

Fig. 545.

Fig. 546.

Fig. 547.

ESPHERA

Um corpo limitado por uma superficie convexa da qual todos os pontos são egualmente distantes de um ponto interior, chama-se **esphera.**

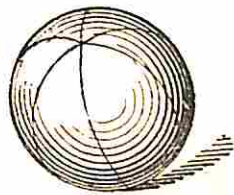



Fig. 548. — Uma bola: esphera.

Uma laranja, uma lima, um limão, um queijo do Rheno, uma bola de bilhar, uma bola de borracha (fig. 548) têm a fórma espherica.

O ponto interior é o *centro* da **esphera** (fig. 549).

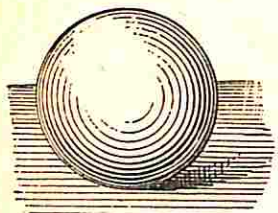



Fig. 549. — Esphera.

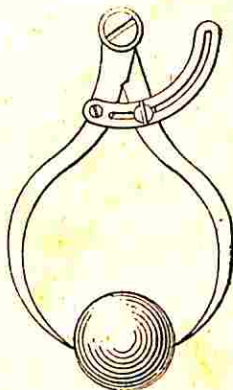
A **esphera** póde ser tambem definida como um corpo produzido pela revolução de um semi-circulo girando ao redor do diametro.

A semi-circumferencia produz a superficie espherica.

Uma recta traçada do centro a um ponto qualquer da superficie espherica é um raio, e a recta que passa pelo centro e termina na superficie espherica é um *diametro* da **esphera.**

Fig. 550.

As extremidades de um diametro determinam os *pólos*.

Práticamente obtem-se o *diametro* de uma **esphera** com um instrumento chamado *compasso de espessura* (fig. 550).

Toda secção feita por um plano na **esphera** é um *circulo*.

Toda secção feita pelo centro da **esphera** é um *grande circulo* (fig. 551).

As partes principaes da superficie espherica são :

a ***calotta***
o ***fuso espherico***
a ***zona***

Á porção da superficie espherica compre-

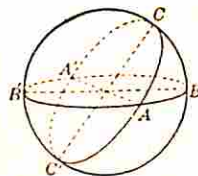



Fig. 551.

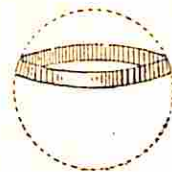



Fig. 552.

hendida entre dois circulos parallelos dá-se o nome de ***zona*** (fig. 552).

A parte da superficie espherica entre dois grandes semi-circulos que terminam em um

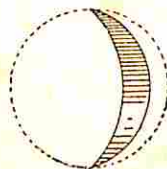



Fig. 553.

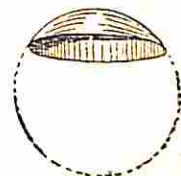



Fig. 554.

mesmo diametro chama-se um ***fuso espherico*** (fig. 553).

A ***calotta*** (fig. 554) é uma parte da super-

ficie espherica comprehendida entre um pequeno circulo e um plano parallelo a este circulo e tangente á **esphera**.

Uma cuia dá-nos idéa de uma *calotta espherica.*

A casca de uma talhada de laranja dá-nos idéa do *fuso espherico.*

Um aro de um barril, um cinto, etc., dão-nos idéa de uma *zona.*

As principaes partes solidas da *esphera* são :

o *segmento*
a *cunha* ou *unha*
o *sector*

A porção da esphera comprehendida entre dois planos parallelos é um *segmento* de duas bases (fig 555) e a porção da esphera compre-

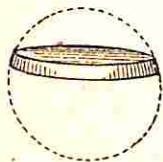



Fig. 555.

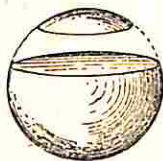



Fig. 556.

hendida por uma parte da superficie espherica e um plano secante, é um *segmento extremo* (fig. 556).

Uma rodella de limão dá-nos perfeita idéa de um *segmento* de duas bases.

Á parte solida de uma **esphera,** comprehendida entre os planos de dois grandes semi-circulos que terminam em um diametro commum, dá-se o nome de *unha* ou *cunha espherica* (fig. 557).

Exemplos : um gomo de laranja, uma talhada de melancia.

A parte da **esphera** da fórma de um cône de

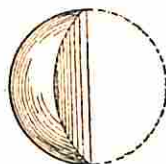



Fig. 557.

Fig. 558.

base convexa chama-se *sector espherico* (fig. 558).

O *vertice* do *sector* é o *centro* da *esphera* e a *base* é uma *calotta espherica.*

Um pião nos mostra approximadamente a fórma de um *sector espherico.*

Um plano é tangente a uma *esphera* quando só tem um ponto commum com a **esphera**.

Cada plano tangente a uma **esphera** é perpendicular ao *raio* que termina no ponto de contacto.

EXERCICIOS

1. — Amanda! quaes são os corpos redondos que estudamos em geometria elementar?
2. — Por quantas superficies é limitado o cylindro? — e o cône? — e a esphera?
3. — Que é um cylindro?
4. — Cita alguns exemplos de objectos usuaes que tenham a fórma cylindrica.
5. — Mostra as bases de um cylindro.
6. — Qual a altura de um cylindro?
7. — Que é o eixo de um cylindro?
8. — Qual a geratriz?
9. — Que nome tem a superficie convexa do cylindro?
10. — Que é um cylindro recto?
11. — Que é um cylindro obliquo?
12. — Que é um tronco de cylindro?
13. — Mostra um cône.
14. — Qual a base?
15. — Qual a superficie lateral?
16. — Que é um cône?
17. — Conheces alguns objectos usuaes que têm a fórma conica?
18. — Exemplos.
19. — Que é um cône recto?
20. — Que é um cône obliquo?
21. — Que é um tronco de cône?
22. — Dá-me o nome de um objecto que tenha a fórma de um tronco de cône.
23. — Como podemos considerar um tronco de cône recto?
24. — Que são secções conicas?
25. — Quando é a secção conica, uma ellipse?
26. — Quando é um triangulo isosceles?
27. — Quando um circulo?
28. — Quando uma parabola? — uma hyperbole?
29. — Que fórma tem este limão? — esta bóla?
30. — Que é uma esphera?

31. — Que é um raio de uma esphera? — e o diametro?
32. — Que são os pólos?
33. — Mostra um grande circulo.
34. — Quaes as principaes partes da superficie espherica?
35. — Que é uma zona?
36. — Que é um fuso espherico?
37. — Que é uma calotta?
38. — Quaes as principaes partes solidas de uma esphera?
39. — Que é um segmento?
40. — Que é uma cunha espherica?
41. — Que é um sector espherico?
42. — Que fórma tem um gomo de uma laranja?
43. — Com que parte da superficie espherica se parece um annel?
44. — Onde fica o vertice de um sector espherico?
45. — Que é a base de um sector espherico?
46. — Quando é que um plano é tangente a uma esphera?
47. — Um plano tangente a uma esphera é perpendicular a que?
48. — Traça á mão livre as figuras estudadas nesse capitulo.

Nota. — Para as licções contidas nos capitulos XV, XVI, XVII e XVIII é necessario que o professor disponha de uma collecção de solidos geometricos.

Estes solidos devem ser feitos em cartão, pelos alumnos.

CAPITULO XVIII

SUMMARIO : **Áreas dos polyédros e dos corpos redondos. — Problemas.**

ÁREAS DOS POLYÉDROS E DOS CORPOS REDONDOS.

A **área** total de um *polyédro regular* é egual á somma das **áreas** de todas as faces.

As faces sendo eguaes entre si, basta multiplicar a **área** de uma face pelo numero de faces do *polyédro*.

Eis a fórmula :

$$AT = a \times n$$

a representa a área de uma face e n o numero d'ellas.

HEXAÉDRO REGULAR ou CUBO

A **área** *lateral* é egual a quatro vezes o quadrado de uma aresta :

$$AL = 4 \times a^2$$

Problema 245. — A aresta de um cubo é egual a 6 centimetros ; qual a área lateral ?

Applicando-se a fórmula :

$$AL = 4 \times 6^2 = 4 \times 36 = 144$$

A área lateral = 144 centimetros quadrados.

A **área** *total* é egual a seis vezes o quadrado de uma aresta :

$$AT = 6 \times a^2$$

Problema 246. — A aresta de um hexaédro regular é egual a 6 centimetros, pede-se a área total.

Appliquemos a fórmula e teremos :

$$AT = 6 \times 6^2 = 6 \times 36 = 216$$

A área total = 216 centimetros quadrados.

Problema 247. — Qual a aresta de uma caixa cubica cuja área total é egual a 42.336 centimetros quadrados ?

A área de uma face é egual a $\frac{42.336}{6} = 7.056$.

Portanto a aresta da caixa cubica é egual a

$$\sqrt{7.056} = 84 \text{ centimetros.}$$

PRISMA RECTO

A **área** *lateral* é egual ao perimetro da base multiplicado pela altura :

$$AL = P \times A$$

Problema 248. — O perimetro é egual a 12 centimetros e a altura a 5 centimetros, pede-se a área lateral de um prisma recto.

$$AL = 12 \times 5 = 60$$

A área lateral é egual a 60 centimetros quadrados.

A **área** *total* é egual ao perimetro da base multiplicado pela altura mais as áreas das duas bases :

$$AT = P \times A + 2B$$

Problema 249. — Qual a área total de um parallelepipedo rectangulo tendo 8 centimetros de comprimento, 5 de largura e 3 de altura?

O perimetro da base =

$= (8 \times 2) + (5 \times 2) = 26$ centimetros

Uma base =

$= 8 \times 5 = 40$ centimetros quadrados.

Substituamos na fórmula P, A e B pelos seus valores.

$AT = (26 \times 3) + (2 \times 40) = 158$ centimetros quadrados

PRISMA OBLIQUO

A **área** *lateral* de um prisma obliquo é egual ao producto de uma aresta pelo perimetro de uma secção recta :

$$AL = Psr \times a$$

Psr é o perimetro da secção recta e a é a aresta do prisma.

Problema 250. — Qual a área lateral de um prisma obliquo cujo perimetro da secção recta tem $24^m,50$ e a aresta lateral do prisma $42^m,80$?

$$AL = 24,50 \times 42,80 = 1048^{m2},60$$

PYRAMIDE REGULAR

A **área** *lateral* é egual ao perimetro da base multiplicado pela metade do apothema :

$$AL = P \times \frac{Ap}{2}$$

Obtemos d'este modo, e por uma só operação a somma dos triangulos de que se compõe a **área** lateral da pyramide.

Problema 251. — Qual a área lateral de uma pyramide pentagonal cujo apothema mede 14 centimetros e um lado do polygono da base 4 centimetros ?

O perimetro da base é =

$= 4 \times 5 = 20$ centimetros

e a metade do apothema $=7$,
portanto

$$AL = 20 \times 7 = 140 \text{ centimetros quadrados.}$$

A **área** *total* da pyramide regular é egual ao perimetro da base multiplicado pela metade do apothema mais a área da base :

$$AT = P \times \frac{Ap}{2} + B$$

Problema 252. — Qual a área total de uma pyramide cujo apothema é egual a 8 centimetros e um lado da base (quadrada) 3 centimetros ?

O perimetro da base $= 3 \times 4 = 12$ centimetros
A metade do apothema $= 4$ centimetros
A base $= 3 \times 3 = 9$ centimetros quadrados,
portanto

$$AT = 12 \times 4 + 9 = 57 \text{ centimetros quadrados.}$$

PYRAMIDE REGULAR TRUNCADA REGULARMENTE

A **área** *lateral* é egual á semi-somma dos perimetros das bases multiplicada pela altura de uma das faces :

$$AL = \frac{P + p}{2} \times A$$

porque esta área compõe-se de uma série de trapezios da mesma altura, cujas bases for-

mam os perimetros das bases da pyramide regular truncada regularmente.

Problema 253. — Qual a área lateral de um tronco de pyramide de bases parallelas cujo perimetro da base menor$=25^m,0$ e o da base maior$=35^m,0$ e cuja altura de uma das faces é de $2^m,50$?

Substituindo-se P, p e A pelos seus valores, teremos :

$$AL = \frac{35 + 25}{2} \times 2,50 = 30 \times 2,50 = 75^{m2}$$

CYLINDRO RECTO

Base circular

A **área** da *superficie convexa* é egual á circumferencia da base multiplicada pela altura :

$$AL = 2\pi R \times A$$

Problema 254. — Qual a área lateral de um cylindro tendo 50 centimetros de altura e 10 centimetros o raio da base ?

A circumferencia da base $= 3,1416 \times 0,20 = 0,62832$
portanto

$$\text{Área} = 0,62832 \times 0,50 = 0^{m2},314160$$

A **área** *total* é egual ao contorno de uma base multiplicado pela altura mais duas vezes a área de uma base :

$$AT = 2\pi R \times A + 2\pi R^2 = 2\pi R(A + R).$$

Problema 255. — A altura de um cylindro é egual a 4 centimetros e o raio de uma base egual a 2 centimetros qual é a área total d'este cylindro ?

Substituamos na fórmula A e R pelos seus valores e teremos:

$$AT = 2 \times 3{,}1416 \times 0{,}02\,(0{,}04 + 0{,}02) = 0{,}125664 \times 0{,}06 = = 0^{m2}{,}00753984$$

Para termos a **área** *lateral* de um cylindro obliquo multipliquemos o contorno da secção recta pela geratriz do cylindro.

A **área** *lateral* de um cylindro recto truncado é egual ao producto da circumferencia da base pela média arithmetica entre a maior e a menor das geratrizes (fig. 559).

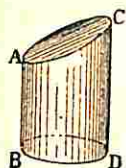



Fig. 559.

$$AL = 2\pi R \times \frac{G+g}{2}$$

G é a geratriz maior e g é a geratriz menor.

Problema 256. — Qual a área lateral de um cylindro recto truncado cujo raio da base tem 6 metros, a geratriz menor $7^m{,}50$, e a maior $8^m{,}30$?

Substituindo-se na formula as lettras pelos seus valores:

$$AL = 2 \times 3{,}1416 \times 6 \times \frac{8{,}30 + 7{,}50}{2} = 297^{m2}{,}823680$$

CÔNE RECTO

Base circular

A **área** da *superficie convexa* é egual ao contorno da base multiplicado pela metade do apothema:

$$AL = 2\pi R \times \frac{Ap}{2}$$

simplificando esta fórmula teremos:

$$AL = \pi R \times Ap$$

Isto é, π multiplicado pelo raio e multiplicado ainda pelo apothema.

Problema 257. — Qual a área lateral de um cône recto cuja base tem 6 centimetros de raio e o apothema 9 centimetros?

$$A = 3{,}1416 \times 0^m{,}06 \times 0^m{,}09 = 0^{m2}{,}01696464$$

A **área** total é egual á área lateral mais a área da base:

$$AT = \pi R Ap + \pi R^2 = \pi R (Ap + R)$$

Problema 258. — A área lateral de um cône recto é egual a 32 centimetros quadrados e o raio da base é egual a 8 centimetros, pede-se a área total.

$$AT = 0{,}0032 + 3{,}1416 \times 0{,}0064 = 0^{m2}{,}02330624$$

A **área** *lateral* de um tronco de côno recto, de base circular é egual ao producto da semi-somma das circumferencias das bases pela geratriz:

$$AL = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \times G$$

Problema 259. — Qual a área lateral de um tronco de cône recto de base circular, sabendo-se que o raio da base maior = 8 metros, o da base menor = 6 metros, e a geratriz = $10^m{,}85$?

A circumferencia da base maior $= 2 \times 3,1416 \times 8 = 3,1416 \times 16 = 50^m,2656$

A circumferencia da base menor $= 2 \times 3,1416 \times 6 = 3,1416 \times 12 = 37^m,6992$

Portanto a área lateral $= 10,85 \times \frac{50,2656 + 37,6992}{2} = 477^{m2},209040$

ESPHERA

A **área** da esphera é egual ao producto da circumferencia de um circulo maximo, pelo diametro (dous raios) ou ao quadruplo da área do circulo maximo :

$$A = 2\pi R \times 2R = 4\pi R^2$$

Problema 260. — Qual a área de uma esphera cujo raio é egual a 25 centimetros ?

A circumferencia de um circulo maximo $= 3,1416 \times 0,50 = 1,5708$.

Portanto a área da esphera $=$

$$= 1,5708 \times 0,50 = 0^{m2},7854$$

O *diametro* de uma esphera é egual á raiz quadrada do quociente da divisão da área da esphera por π.

$$D = \sqrt{\frac{\text{Área}}{\pi}}$$

Problema 261. — Qual o diametro de uma esphera cuja área é egual a $50^{m2},2656$?

Sendo o quociente da divisão de

$$50,2656 \text{ por } 3,1416 = 16,$$

$$\text{a} \sqrt{16} = 4.$$

O diametro é egual a 4 metros.

Problema 262. — Qual o raio de uma esphera cuja área é egual a $127^{m2},35$?

Sendo o raio a metade do diametro, a fórmula será :

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\text{Área}}{\pi}}$$

O quociente de

$$127,35 \text{ por } 3,1416 = 40,534$$

a raiz quadrada de

$$40,534 = 6,36$$

e a metade de

$$6,36 = 3,18.$$

O raio é pois egual a $3^m,18$.

ZONA E CALOTTA

A **área** de uma zona (*) ou de uma calotta é egual ao producto da circumferencia de um grande circulo da esphera pela altura da zona :

$$A.z. = 2\pi R \times A$$

$A.z.$ é a área da zona e A é a altura.

Problema 263. — Em uma esphera de 26 metros de raio, tomemos uma zona de $1^m,22$ de altura. Qual a sua área?

(*) A *calotta* é uma *zona* de uma só base, isto é, de uma só circumferencia.

A circumferencia $= 2 \times 3{,}1416 \times 26 =$ 163,3632 e a área da zona $= 163{,}3632 \times 1{,}22 = 199^{m2}{,}303104$.

FUSO

A **área** do fuso espherico é egual ao producto da área da esphera, á qual pertence o fuso, pelo valor do angulo formado pelos dois meios grandes circulos que o limitam e dividido por 360.

$$A.f. = \frac{\text{Área da esphera} \times n}{360}$$

$A.f.$ é a área do fuso e n é o numero de gráos do angulo formado pelos dois meios grandes circulos que limitam o fuso espherico.

Problema 264. — Qual a área de um fuso espherico comprehendido entre 18 gráos da circumferencia de um grande circulo de uma esphera de 12 metros quadrados de área?

A área da esphera $= 4\pi R^2$ ou 12^{m2} e a área do fuso $=$

$$= \frac{12 \times 18}{360} = 0^{m2}{,}60$$

EXERCICIOS

1. — Olavinho! a que é egual a área total de um polyédro régular?
2. — Qual a fórmula?
3. — Que representa a lettra [illegible] ?
4. — E a lettra n?

5. — Qual a fórmula que nos dá a área lateral de um cubo?
6. — Qual a fórmula que nos dá a área total de um hexaédro regular?
7. — Porque é que multiplicamos a^2 por 6?
8. — Para acharmos a área lateral de um prisma recto, que fórmula empregamos?
9. — Que representa a lettra P? — e a lettra A?
10. — Dá-nos a fórmula para resolvermos um problema em que se pede a área total de um prisma recto.
11. — A que é egual a área lateral de um prisma obliquo?
12. — A que é egual a área lateral de uma pyramide regular?
13. — E a área total?
14. — Dá-nos as fórmulas.
15. — Que quer dizer:

$$A\,L = \frac{P + p}{2} \times A$$

16. — Qual a fórmula que nos dá a área da superficie convexa de um cylindro recto de base circular?
17. — A que é egual e o que representa a fórmula

$$A\,T = 2\pi R \times A + 2\pi R^2$$

18. — Como podemos avaliar a área lateral de um cylindro obliquo?
19. — A que é egual a área lateral de um cylindro recto de base circular e truncado?
20. — Simplifica a fórmula $A\,L = 2\pi R \times \frac{A\,p}{2}$; — que reprenta?
21. — A que é egual a área total de um cône recto de base circular?
22. — Qual a fórmula?
23. — Como se avalia a área lateral de um tronco de cône recto, de bases circulares?
24. — Traduze esta fórmula:

$$A\,L = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \times G$$

25. — Como resolveremos um problema em que se pede a área de uma esphera?

26. — Que quer dizer $4 \pi R^2$?

27. — A que é egual o diametro de uma esphera?

28. — Como podemos determinar o raio de uma esphera? — e práticamente?

29. — Como se avalia a área de uma zona?

30. — A calotta é uma zona?

31. — Qual a área de um fuso espherico?

32. — Dá-me a fórmula.

33. — Qual a área total de um cubo de 6 centimetros de aresta?

34. — Qual a área lateral de um cubo de 0^m,8 de aresta?

35. — Que porção de folha de Flandres será preciso para forrar internamente um caixão cubico de 1^m,30 de aresta?

36. — Qual a área lateral da sala da aula?

37. — Qual a área lateral de um parallelepipedo rectangulo de 5^m de altura, tendo uma base de 2^m,40 $\times$ 1^m,30?

38. — Qual a área total de um parallelepipedo rectangulo tendo 4^m de comprimento, 1^m,50 de largura e 0^m,80 de altura?

39. — Qual a área da base de um prisma quadrangular que tem por altura 1^m,80 e por volume 4096 centimetros cubicos?

40. — Um proprietario mandou caiar as paredes de um quarto de 6^m de comp., 4^m,5 de larg. e 5^m,5 de altura. Qual foi a despeza total d'esse trabalho a 600 réis o metro quadrado?

41. — Qual o preço da pintura de uma sala rectangular sabendo-se que o perimetro do soalho = 23 metros, a altura = 5^m,5, o vão de uma porta = 3^m,50 $\times$ 1^{m}05 e o de uma janella = 1^m,18 $\times$ 2^m,50 e que o metro quadrado d'essa pintura fica a 1$250?

42. — Uma sala hexagonal regular tem 10 metros na sua maior largura e 6^m,20 de altura. Desejando-se pregar um filete de madeira em todos os cantos d'esta sala e sabendo-se que o metro linear d'esse filete vale 500 réis, pede-se a quantidade de metros e o preço total.

43. — A aresta lateral de um prisma obliquo mede 0^m,14 e o perimetro da secção recta = 0^m,24. Pede-se a área lateral d'esse prisma.

44. — Qual a área lateral de um prisma obliquo, cujo perimetro da secção recta mede 0^m,85 e uma aresta lateral 0^{m}92?

45. — Qual a área lateral de uma pyramide regular cujo apothema = 0^m,22 e o perimetro da base = 0^m,30?

46. — Qual a área lateral de uma pyramide regular cujo perimetro da base = 25 metros e o apothema = 12^m,46?

47. — Qual a área lateral de um tronco de pyramide regular de bases parallelas sendo o perimetro de uma base = 15^m, o da outra base = 20^m, e a altura de um dos trapezios lateraes = 3^m,40?

48. — Qual a área lateral de uma urna da fórma de um tronco de pyramide de base quadrada, em que um dos lados d'essa base mede 0^m,09, um dos lados da abertura = 0^m,16 e a altura de uma das faces = 0^m,20?

49. — Que porção de folha de Flandres será preciso empregar para fabricar uma chaminé de 2^m,85 de altura por 0^m,12 de diametro?

50. — Qual a área lateral de um cylindro recto de base circular tendo 1^m,20 de raio e 3^m,80 de altura?

51. — Quantos metros de papel de 0^m,36 de largura devem empregar para forrar uma columna cylindrica de 4^m,46 de circumferencia e 8^m,50 de altura?

52. — Qual a área total de um cylindro recto de base circular, cujo raio = 0^m,60 e a altura = 2^m,35?

53 — Qual a área lateral de um cylindro obliquo cuja secção recta tem 6^m,40 de circumferencia e cuja geratriz mede 14^m,80?

54. — Qual a área lateral de um cylindro recto truncado cuja circumferencia da base mede 0^m,642 e cujas geratrizes extremas têm, uma 0^m,92 e outra 0^m,74?

55. — Qual a área lateral de um cône recto cujo diametro da base mede 0^m,06 e a geratriz 0^m,08?

56. — Qual a área lateral de um cône recto de base circular, cujo diametro da base = 0^m,4 e a altura do cône = 0^m,92?

57. — Qual a área lateral de um tronco de cône cuja altura é egual a 40 cm., o raio da base menor 60 cm. e o da base maior 84 cm.?

58. — Qual a área de uma esphera de 0^m,15 de raio?

59. — Qual a área convexa de uma calotta espherica de 0^m,62 de altura, sabendo-se que o raio da esphera é de 2^m,20?

60. — Qual a área de um fuso espherico que comprehende 32° de um grande circulo de uma esphera que tem 14 metros quadrados de área?

CAPITULO XIX

SUMMARIO : **Volume dos polyédros e dos corpos redondos. — Problemas.**

Medir o **volume** de um corpo é determinar quantas vezes este corpo contém um outro, tomado para unidade de medida.

VOLUME DOS POLYÉDROS E DOS CORPOS REDONDOS.

Dois prismas, duas pyramides, dois cylindros são eguaes em **volume** quando têm as bases equivalentes e as alturas eguaes.

PARALLELEPIPEDO RECTANGULO

O **volume** é egual ao producto das tres arestas que convergem em um mesmo vertice.

Supponhamos que no parallelepipedo CF (fig. 560) a aresta AB = 4 centimetros
BD = 6 centimetros
BF = 3 centimetros.

Dividamos AB em quatro partes eguaes e pelos pontos de divisão façamos passar planos perpendiculares a AB; o parallelepipedo fica dividido em 4 outros, tendo cada um, 1 centimetro de comprimento, 6 de altura e 3 de profundidade; dividamos BF em tres partes eguaes e pelos pontos de divisão façamos passar planos perpendiculares a BF : cada parallelepipedo fica dividido em 3 outros, medindo cada um, 1 centimetro de comprimento, 6 de altura e 1 de profundidade.

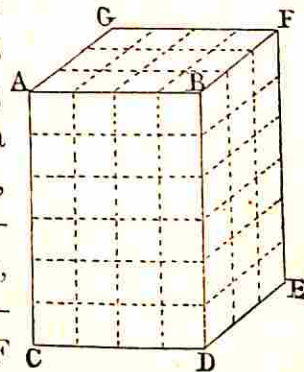



Fig. 560.

CF terá portanto $4 \times 3 = 12$ parallelepipedos eguaes.

Dividamos finalmente BD em 6 partes eguaes e façamos passar, pelos pontos de divisão, planos perpendiculares a BD : cada um dos 12 parallelepipedos ficará dividido em 6 cubos tendo 1 centimetro de lado.

CF terá então $4 \times 3 \times 6 = 72$ centimetros cubicos.

O **volume** de um parallelepipedo qualquer é egual ao producto da área da base pela altura, porque um parallelepipedo qualquer é equivalente em **volume** a um parallelepipedo rectangulo da mesma base e da mesma altura.

$$V = \text{Área da base} \times A = C \times L \times A$$

isto é, o producto das tres dimensões : *comprimento, largura* e *altura*.

Problema 265. — Qual o volume d'agua contido em um tanque de fundo rectangular, tendo $1^m,25$ de comprimento, $0^m,80$ de profundidade e $0^m,90$ de largura ?

O volume é o de um parallelepipedo cujas dimensões o :

$1^m,25$
$0^m,80$
$0^m,90$

Portanto egual a :

$1,25 \times 0,80 \times 0,90 = 900$ decimetros cubicos d'agua.

Da fórmula

$$V = C \times L \times A$$

deduzem-se as seguintes :

$$C = \frac{V}{L \times A} \text{ para o } \textit{comprimento}$$

$$L = \frac{V}{C \times A} \text{ para a } \textit{largura}$$

$$A = \frac{V}{C \times L \text{ ou a base}} \text{ para a } \textit{altura}$$

$$B = \frac{V}{A} \text{ para a } \textit{base}$$

Problema 266. — Qual o comprimento de um caixão cujo volume $= 72^{m^3}$; a largura 4^m e a altura 3^m ?

$$C = \frac{72}{4 \times 3} = 6 \text{ metros.}$$

Problema 267. — Qual a largura de um pequeno bloco de pedra em fórma de um parallelepipedo cujo volume $= 80^{cm^3}$ a altura $0^m,02$, e o comprimento $0^m,08$?

$$L = \frac{0.000080}{0.08 \times 0.02} = 0^m,05.$$

Problema 268. — Qual a altura de um salão cujo volume $= 4564^{m^3},560$; o comprimento $30^m,8$ e a largura $15^m,6$?

$$A = \frac{4564,560}{30,8 \times 15,6} = 9^m,5.$$

Problema 269. — Qual a área da base de um deposito d'agua de fórma prismatica, sabendo-se que esta base é um

rectangulo, o volume do deposito é de $354^{m^3},016$, e a altura é de $5^{m},2$?

$$B = \frac{354,016}{5.2} = 68^{m^2},08.$$

HEXAÉDRO REGULAR

O **volume** é egual ao producto de uma aresta tomada tres vezes como factor, porque o cubo é um parallelepipedo rectangulo cujas arestas são todas eguaes entre si :

$$V = a^3$$

Problema 270. — Qual o volume de uma caixa cubica cuja aresta mede 6 decimetros?

O volume $= 6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$ decimetros cubicos

Da fórmula

$$V = a^3$$

deduz-se

$$a = \sqrt[3]{V}$$

isto é, a *aresta* é egual á raiz cubica do **volume.**

Conhecida a área de uma face e o apothema, o **volume** do cubo é :

$$V = \frac{\text{área de uma face} \times 6 \times Ap}{3}$$

Conhecido o **volume** e o apothema a ***área total*** é

$$AT = \frac{3 \times V}{Ap}$$

Dado o **volume** e a área total, o *apothema* é

$$Ap = \frac{3 \times V}{AT}$$

Problema 271. — Que comprimento tem a aresta de uma caixa cubica cujo volume é de $551^{cm^3},368$?

$$\text{A aresta} = \sqrt[3]{551368} = 8^{cm},2$$

Problema 272. — A área de uma das faces de um cubo $= 64^{cm^2}$ e o apothema $= 4$ centimetros. Pede-se o volume d'esse prisma.

$$\text{O volume} = \frac{64 \times 6 \times 4}{3} = 512 \text{ centimetros cubicos.}$$

Problema 273. — Qual a área total de um hexaédro regular cujo volume é de 1331 centimetros cubicos e o apothema $= 55$ millimetros?

$$\text{A área total} = \frac{3 \times 1331}{55} = \frac{3993}{55} = 72^{cm^2},60.$$

Problema 274. — Pede-se o apothema de um cubo conhecendo-se : volume $= 125^{m^3}$ e a área total $= 150^{m^2}$.

$$\text{O apothema} = \frac{3 \times 125}{150} = 2^{m},50.$$

PRISMA TRIANGULAR

Recto ou obliquo

O **volume** é egual ao producto da área da base pela altura, porque o **volume** do prisma

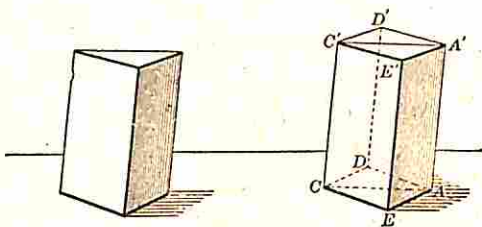



Fig. 561. Fig. 562.

triangular (fig. 561) é egual á metade do **volume** de um parallelepipedo (fig. 562) que tendo a mesma altura, teria uma base dupla.

Ora o **volume** d'esse parallelepipedo é $2B \times A$, portanto o **volume** do prisma triangular é egual a

$$\frac{2B \times A}{2} \text{ ou } B \times A$$

isto é, o producto da base pela altura.

$$V = B \times A$$

O **volume** de um prisma qualquer (fig. 563) é egual ao producto da base pela altura porque elle póde sempre ser decomposto

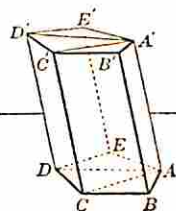
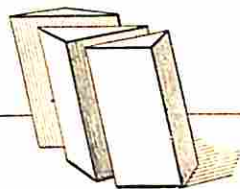



Fig. 563. Fig. 564.

em differentes prismas triangulares (fig. 564) de egual altura e cujas bases reunidas formam a base do prisma.

Problema 275. — A altura de um prisma é egual a 6 metros e a área da base, que é um losango mede $2^{m2},66$; qual é o volume d'esse prisma?

O volume $= 2{,}66 \times 6 = 15$ metros cubicos e 960 decimetros cubicos.

Da fórmula

$$V = B \times A$$

deduzem-se:

$$B = \frac{V}{A} \text{ para a } \textit{base} \text{ do prisma}$$

$$A = \frac{V}{B} \text{ para a } \textit{altura} \text{ do prisma}$$

Problema 276. — Qual a área da base de um prisma cuja altura mede 12^{m} e o volume 3888^{m3}?

$$\text{A área da base} = \frac{3888}{12} = 324^{m2}.$$

Problema 277. — Qual a altura de uma torre prismatica cuja base mede $68^{m^2},49$ e o volume $410^{m^3},940$?

$$\text{A altura} = \frac{410,940}{68,49} = 6 \text{ metros.}$$

PYRAMIDE TRIANGULAR

Recta ou obliqua

Todo o prisma triangular decompõe-se em tres ***pyramides*** triangulares equivalentes.

Seja AEDFCB (fig. 565) o prisma triangular. Unamos o ponto A aos pontos E e F, e pelas rectas AE e AF façamos passar um plano, obteremos d'esta maneira uma ***pyramide*** A-EDF que tem a mesma base e a mesma altura que o prisma.

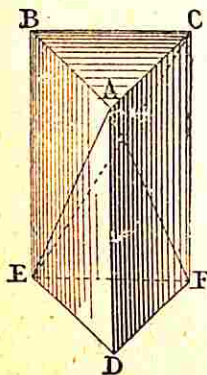
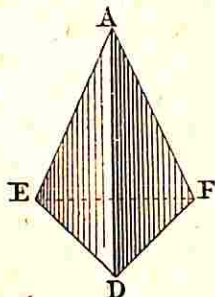
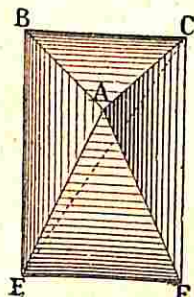



Fig. 565. Fig. 566. Fig. 567.

Destaquemos do prisma a ***pyramide*** A-EDF (fig. 566) e obtemos uma outra pyramide A-EFCB (fig. 567) tendo para vertice o ponto A e para base o rectangulo EFCB; tracemos a diagonal CE e façamos passar por esta recta e o ponto A, um plano EAC que dividirá a ***pyramide*** quadrangular em duas pyramides triangulares A-EBC (fig. 568) e A-EFC (fig. 569) que são equivalentes como tendo para bases os triangulos eguaes EBC e CEF e para altura commum a perpendicular abaixada do ponto A sobre o plano EFCB.

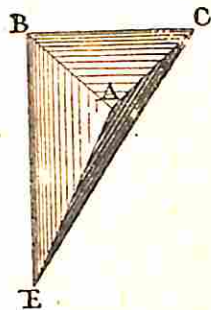



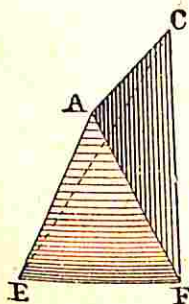
Fig. 568.

Na ***pyramide*** A-EBC o vertice póde ser considerado o ponto E e a base ABC, portanto as pyramides A-EBC e A-EDF são equivalentes como tendo a mesma altura (a altura do prisma) e a mesma base (as bases do prisma); logo as tres pyramides são equivalentes.

Fig. 569.

O **volume** de uma *pyramide* triangular é egual ao producto da área da base pela terça parte da altura, porque uma pyramide triangular é a terça parte de um prisma triangular da mesma base e da mesma altura.

$$V = B \times \frac{A}{3}$$

Problema 278. — A base de uma pyramide é egual a 6 metros quadrados e a altura = 12 metros; qual o volume d'esta pyramide?

A área da base = 6 metros quadrados.

A terça parte da altura = 4 metros

Portanto o volume da pyramide = 6 × 4 = 24 metros cubicos.

O **volume** de uma pyramide qualquer é egual ao producto da área da base pela terça

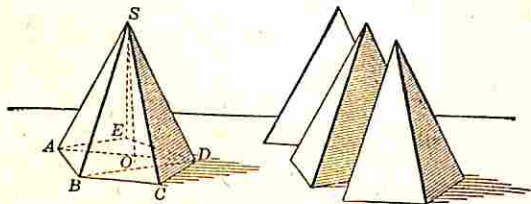



Fig. 570.

Fig. 571.

parte da altura, porque uma pyramide qualquer (fig. 570) póde sempre ser decomposta em tantas pyramides triangulares (fig. 571)

quantos forem os triangulos em que se pudér dividir a base.

Estas pyramides têm, cada uma, por medida a terça parte do producto da base pela altura; portanto a somma de todas estas pyramides, terá por medida a terça parte do producto da somma de suas bases pela altura commum ou o producto da base da pyramide dada, pela terça parte da altura.

$$V = \frac{B \times A}{3}$$

D'esta fórmula **deduzem-se**:

$$B = \frac{3V}{A}$$ para se achar a *base*

$$A = \frac{3V}{B}$$ para se achar a *altura*

Isto é, a base é egual a tres vezes o volume dividido pela altura e esta é egual a tres vezes o volume dividido pela base.

CYLINDRO RECTO ou OBLIQUO

Base circular

O volume é egual ao producto da base pela altura, porque o cylindro (fig. 572) póde ser considerado como um prisma (fig. 573) de base regular e de um numero infinito de lados :

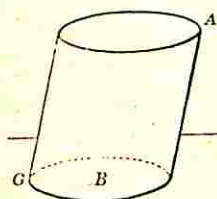
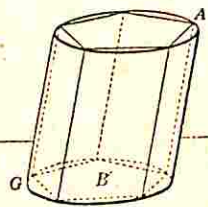



Fig. 572. Fig. 573.

$$V = \pi R^2 \times A$$

isto é, a área do circulo (base) multiplicada pela altura.

Problema 279. — A altura de um cylindro é egual a 4 metros e o raio da base egual a 2 metros ; qual será o volume d'este cylindro?

A altura = 4 metros.

A base = 3,1416 × 4 = 12 metros quadrados 5664 centimetros quadrados.

O volume do cylindro = 12.5664 × 4 = 50 metros cubicos 265600 centimetros cubicos.

CÔNE RECTO ou OBLIQUO

Base circular

O **volume** é egual ao producto da área da base por um terço da altura porque o cône (fig. 574) póde ser considerado como uma pyramide (fig. 575) cuja base é um polygono regular de um numero infinito de lados :

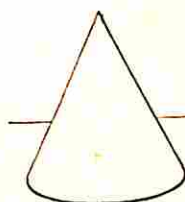
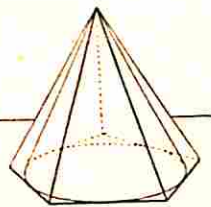



Fig. 574. Fig. 575.

$$V = \pi R^2 \times \frac{A}{3}.$$

Problema 280. — Qual o volume de um cône cuja altura mede 9 metros e o raio da base $2^m,5$?

A área da base = 3,1416 × 6,25 = 19 metros quadrados 6350 centimetros quadrados.

Um terço da altura = 3 metros.

O volume do cône = 19,6350 × 3 = 58 metros cubicos 905 decimetros cubicos.

PRISMA TRIANGULAR TRUNCADO

O **volume** é egual ao producto da base pela terça parte da somma das tres perpendiculares abaixadas dos vertices oppostos sobre a mesma base.

Exemplo :

O volume do prisma (fig. 576) é egual ao producto da base ABC pela terça parte da somma das perpendiculares abaixadas dos

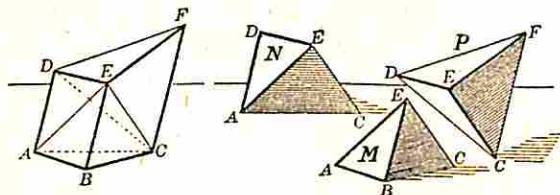



Fig. 576. Fig. 577.

vertices D, E e F sobre a base ou sobre o seu prolongamento.

O mesmo prisma decompõe-se em tres pyramides E-ABC, E-ACD e E-CDF (fig. 577) e e equivalente ás tres outras E-ABC, D-ABC e F-ABC (fig. 578), porque :

1.° — E-ABC (fig. 578 R) tem a mesma base ABC e o mesmo vertice E da fig 577 M : são eguaes ;

2.° — A pyramide E-ACD (fig. 577 N) é equivalente a B-ACD (fig. 578 S) por terem

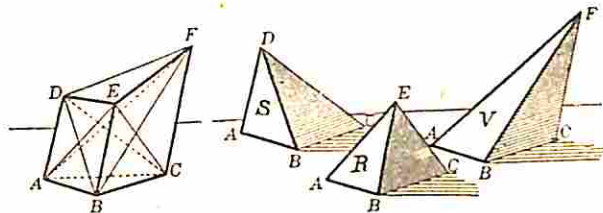



Fig. 578.

a mesma base ACD e a mesma altura (seus vertices E e B estão na mesma recta EB parallela ao plano ACD). Além d'isso a pyramide B-ACD póde ser vista como sendo D o seu vertice e ABC a sua base.

3.° — Finalmente a pyramide E-CDF (fig. 577 P) é equivalente a B-ACF (fig. 578 V) porque suas bases CDF e ACF tambem o são (CF é base commum aos triangulos ACF e DCF, e os vertices A e D estão na mesma recta AD parallela a CF) e suas alturas são eguaes porque os seus vertices E e B estão na mesma recta EB parallela ao plano de suas bases.

Além d'isso a pyramide B-ACF póde ser vista como sendo F o seu vertice, e ABC a sua base

Portanto o prisma ABC-DEF é equiva-

lente á somma das tres pyramides E-ABC; D-ABC e F-ABC; e sendo o volume de cada uma d'essas pyramides triangulares egual ao producto da base pela terça parte da altura, o volume do prisma truncado será egual ao producto da mesma base pela terça parte da somma das tres perpendiculares (alturas das pyramides) tiradas dos tres vertices sobre a base:

$$V = B\left(\frac{A + A' + A''}{3}\right)$$

Problema 281. — Qual o volume de um tronco de prisma triangular cuja base mede 310 decimetros quadrados de área e as tres alturas medem $3^m,60$; $4^m,50$ e $5^m,22$?

A somma das tres alturas é egual a

$$3,60 + 4,50 + 5,22 = 13^m,32$$

$$\text{A terça parte} = \frac{13,32}{3} = 4^m,44$$

Portanto o volume do tronco do prisma triangular = $V = 310 \times 4,44 = 13$ met. cubicos, 764 decim. cubicos.

PYRAMIDE TRIANGULAR TRUNCADA

Bases parallelas

O **volume** é egual ao producto da terça parte de sua altura pela somma de suas bases

mais uma média proporcional entre estas mesmas bases.

A média proporcional obtém-se multiplicando uma base pela outra **e extraindo-se** a raiz quadrada do producto.

$$V = \frac{A}{3} \times \left(b + B + \sqrt{b \times B}\right)$$

Problema 282. — Qual o volume de um tronco de pyramide de bases parallelas, sabendo-se que a altura do tronco é de 21 centimetros e que as áreas das bases têm respectivamente as medidas de 64 decimetros quadrados e 25 decimetros quadrados?

Sendo a base superior = 25^{dm^2}

e a base inferior = 64^{dm^2}.

A média proporcional das bases será =

$$\sqrt{64 \times 25} = \sqrt{1600} = 40$$

E o volume do tronco da pyramide:

$$\frac{21}{3} \times (25 + 64 + 40) = \frac{21}{3} \times 129 = 7 \times 129 =$$

903 decimetros cubicos.

CÔNE TRUNCADO

Bases parallelas

Para termos o **volume,** sommemos o quadrado do raio da base maior com o do raio da base menor e mais o producto dos dois raios entre si, depois multipliquemos este to-

tal por π e pela altura do tronco do cône; finalmente dividamos esse producto por tres :

$$V = \frac{(R^2 + r^2 + Rr) \times \pi A}{3}$$

Problema 283. — Qual o volume de um tronco de cône cujo raio da base maior mede $0^m,6$, o da base menor $0^m,4$ e a altura do tronco, $= 1^m,30$?

O quadrado do raio da base maior $= \overline{0,6}^2 = 0^{m2}, 36$
O quadrado do raio da base menor $= \overline{0,4}^2 = 0^{m2},16$
O producto dos dois raios $= 0,6 \times 0,4 = 0^{m2},24$
Logo o volume do cône truncado $=$

$$\frac{(0,36 + 0,16 + 0,24) \times 3,1416 \times 1,30}{3} = \frac{0,76 \times 4,084080}{3} =$$

$$= 0,76 \times 1,361360 = 1^{m3},034633600$$

ESPHERA

O **volume** é egual ao producto da área pela terça parte do raio, porque a esphera póde ser considerada como sendo formada de uma infinidade de pyramides, cujos vertices terminam no centro e cujas bases formam a área da esphera.

A área da esphera é egual a $4\pi R^2$; multi-

pliquemol-a pela terça parte do raio e teremos :

$$V = 4\pi R^2 \times \frac{R}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

$$\text{Os } \frac{4}{3} \text{ de } \pi = 3,1416 \times \frac{4}{3} = \frac{12,5664}{3} = 4,1888$$

e a fórmula da esphera $\frac{4}{3}\pi R^3$ torna-se egual a $4,1888 \times R^3$, isto é, o **volume** da esphera é egual a um numero constante 4,1888 multiplicado pelo cubo do raio.

O **volume** da esphera é tambem egual ao cubo do diametro multiplicado por π e dividido por 6 :

$$V = \frac{\pi D^3}{6} = \frac{3,1416}{6} \times D^3 = 0,5236 \times D^3.$$

Problema 284. — Qual o volume de uma esphera de $0^m,5$ de raio?

O volume é egual a

$4,1888 \times \overline{0,5}^3 = 4,1888 \times 0,125 = 0^{m3}, 523600$ centimetros cubicos.

Ou ainda :

$$V = \frac{4 \times 3.1416 \times \overline{0,5}^3}{3} = \frac{12,5664 \times 0,125}{3} = \frac{1.5708}{3} =$$

$0^{m3},523600$ centimetros cubicos.

Podemos resolver o problema d'esta outra fórma :

$V = 0,5236 \times D^3 = 0,5236 \times (2 \times \overline{0,5})^3 = 0,5236 \times 1,000 =$ $0^{m2},523600$ centimetros cubicos.

SECTOR ESPHERICO

O **volume** é egual ao producto da área da zona espherica que lhe serve de base, pela terça parte da altura, isto é, do raio da esphera :

$$V = Az \times \frac{R}{3} = 2\pi RA \times \frac{R}{3} = \frac{2}{3}\pi R^2 A$$

Problema 285. — Qual o volume de um sector de uma esphera de 15 centimetros de raio, sabendo-se que a altura da zona que lhe serve de base mede 6 centimetros ?

O producto de π pelo quadrado do raio e pela altura =

$3{,}1416 \times 15 \times 15 \times 6 = 0^{m3}{,}004241160$

e os $\frac{2}{3}$ egual a

$\frac{2 \times 0{,}004241160}{3} = 0^{m3}{,}002827440$ ou

2 decimetros cubicos, 827440.

SEGMENTO ESPHERICO

O **volume** é egual ao producto da metade da altura do segmento, pela somma de suas bases mais o volume da esphera que teria para diametro a altura do mesmo segmento :

$$V = \frac{A}{2} \times (B + b) + \frac{1}{6}\pi A^3$$

A^3 é o cubo da altura do segmento, isto é, do diametro da esphera.

Problema 286. — Qual o volume de um segmento espherico cuja altura é egual a $0^m{,}12$, a área da base maior egual a $0^{m2}{,}2800$ e a da base menor $0^{m2}{,}1809$?

A metade da altura $= \frac{12}{2} = 0^m{,}06$.

A somma das bases $= 0{,}2800 + 0{,}1809 = 0^{m2}{,}4609$

O volume da esphera que teria para diametro a altur do segmento =

$\frac{1}{6}\pi A^3 = \frac{1}{6} 3{,}1416 \times \overline{0{,}12}^3 = \frac{3{,}1416}{6} \times 0{,}001728 =$

$0{,}5236 \times 0{,}001728 = 0^{m3}{,}000904780$.

E o volume do segmento =

$0{,}06 \times 0{,}4609 + 0{,}000904780 =$ 28 decimetros cubicos, 558780.

Problema 287. — Qual o volume de um segmento circular cuja altura mede $0^m{,}15$, o raio de uma base $= 0^m{,}06$ e o da outra base $= 0^m{,}04$?

Substituamos na fórmula, B e b pelas suas equivalentes πR^2 e πr^2 :

$$V = \frac{A}{2} \times (\pi R^2 + \pi r^2) + \frac{1}{6}\pi A^3$$

teremos :

A metade da altura $= \frac{0{,}15}{2} = 0^m{,}075$.

A base maior $= \pi R^2 = 3{,}1416 \times \overline{0{,}06}^2 = 3{,}1416 \times 0{,}0036 = 0^{m2}{,}011309$

A base menor $= \pi r^2 = 3{,}1416 \times \overline{0{,}04}^2 = 3{,}1416 \times 0{,}0016 = 0^{m2}{,}005026$

A somma das bases $= 0{,}011309 + 0{,}005026 = 0^{m2}{,}016335$

O volume da esphera $= \frac{1}{6}\pi A^3 = \frac{1}{6}\pi \times \overline{0{,}15}^3 =$

$= 0{,}5236 \times 0{,}003375 = 0^{m3}{,}001767150$.

E o volume do segmento $= 0{,}075 \times 0{,}016335 + 0{,}001767150 = 0^{m3}{,}002992275$ ou 2 decimetros cubicos, 992275.

CUNHA ou UNHA ESPHERICA

O **volume** é egual ao producto da esphera (da qual faz parte a cunha), pelo numero de gráos do angulo diédro formado pelos planos dos dois semi-circulos que limitam a cunha, dividido por 360.

$$V = \frac{v \times n}{360}$$

sendo v o volume da esphera, e n o numero de gráos do angulo diédro.

Se n exprime *gráos*, a fórmula é a mesma; se exprime *minutos*, é:

$$V = \frac{v \times n}{21600}$$

e se exprime *segundos :*

$$V = \frac{v \times n}{1296000}$$

Problema 288. — Qual o volume de uma cunha espherica cujo angulo é egual a 12°50′; sabendo-se que o raio da esphera á qual ella pertence é egual a $0^m,12$?

Sendo o volume da esphera $= 0,5236 \times \overline{0,24}^3 = 0,5236 \times 0,013824 = 0^{m3},007238246$.

O volume da cunha será $= \frac{0,007238246 \times 770}{21600} =$

$$\frac{5,573449420}{21600} = 0^{dm3},258030.$$

CORPOS IRREGULARES

Quando um solido é irregular e não se lhe conhece nem o peso nem a densidade (*) procede-se do seguinte modo :

1.° — Em um vaso de fórma cylindrica cujo raio da base se possa bem determinar, despeja-se uma certa quantidade d'agua e mergulha-se o corpo de que se deseja conhecer o volume.

O volume da porção d'agua deslocada, isto é, da porção do liquido que fica acima do primeiro nivel é o volume do corpo irregular.

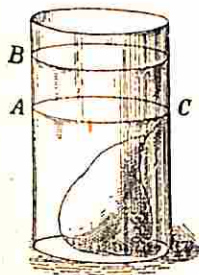



Fig. 579.

Problema 289. — Qual o volume de um corpo irregular qualquer, uma pêra por exemplo?

Seja o vaso (fig, 579) de vidro transparente, de fórma cylindrica, tendo para medida do raio da base $0^m,06$.

Entornemos n'esse vaso um pouco d'agua colorida de vermelho ou de outra côr que seja bem visivel atravéz do vidro.

(*) **Densidade.** — Se as moleculas de um corpo são unidas e seus póros são muito pequenos, este corpo tem, em um pequeno volume, uma grande massa : elle é *denso.* A densidade que é opposta á porosidade é a relação entre a massa e o volume. A massa, em um mesmo volume, sendo maior, a densidade será tambem mais forte.

Um litro de mercurio pesa 13 vezes e meia mais que um

Mergulhemos nessa agua a pêra cujo volume desejamos conhecer : a agua deslocada pela immersão do fructo sóbe, e depois de bem tranquilla a superficie d'agua, tomemos a altura AB da columna do liquido que excedeu do primeiro nivel AC ; supponhamos que AB $= 0^m,015$.

O volume da pêra será egual ao producto da base de vaso pela altura $0^m,015$:

$$V = \pi R^2 A = 3{,}1416 \times \overline{0{,}06}^2 \times 0{,}015 =$$
$$3{,}1416 \times 0{,}0036 \times 0{,}015 = 0^{dm^2},169646.$$

2.° — Encha-se uma vasilha até quasi transbordar e colloque-se esta vasilha dentro de um prato ou qualquer outro objecto que possa receber um liquido; mergulhe-se na vasilha o objecto de que se deseje conhecer o volume, e a agua deslocada transbordará da vasilha e ficará no prato.

Derramada a agua do prato em um vaso graduado, saber-se-á logo qual o volume do objecto, porque *todo o corpo mergulhado em um liquido desloca um volume de liquido egual ao seu.*

litro d'agua distillada, o mercurio tem portanto uma densidade mais forte que a agua porque tem muito mais moleculas.

Se um corpo pesa 100 grammas e o mesmo volume d'agua distillada pesa 20 grammas, a densidade d'esse corpo será egual a

$$\frac{100}{20} = 5 \text{ grammas.}$$

Densidade é o mesmo que **peso especifico.**

3.° — Conhecendo-se a ***densidade*** de um corpo podemos, pelo calculo, determinar-lhe o ***peso.***

O ***peso*** de um corpo qualquer é egual ao producto de seu **volume** pelo seu ***peso especifico*** ou ***densidade :***

$$P = VD$$

e reciprocamente : o ***peso*** de um corpo qualquer sendo conhecido, é facil determinar-lhe o **volume.**

O **volume** de um corpo qualquer é portanto egual ao quociente de seu ***peso*** pela sua ***densidade :***

$$V = \frac{P}{D}$$

Problema 290. — Qual a capacidade de um vaso que se encheu de $32^{kg},50$ de mercurio, sabendo-se que a densidade do mercurio é de 13,50 ?

Se essa porção de mercurio encheu perfeitamente o vaso, a capacidade d'este será egual ao volume do mercurio.

Logo

$$V = \frac{32{,}50}{13{,}50} = 2^{dm^3},4 = 2 \text{ litros, } 4$$

Problema 291. — Qual o volume de um tóro de cedro do peso de 450^{kg} sabendo-se que a densidade d'essa madeira é de 0,56 ?

$$\text{O volume} = \frac{450}{0{,}56} = 803^{dm^3},571$$

Problema 292. — Qual o volume de uma barra de prata do peso de $62^{kg},82$ sabendo-se que a densidade da prata fundida é de 10,47?

$$\text{O volume} = \frac{62{,}82}{10{,}47} = 6^{dm3}$$

Problema 293. — Qual o peso de uma ardosia cujo volume é egual a 150 cent. cubicos e sua densidade de 2,88?

$$P = 150 \times 2{,}88 = 0^{kg},432.$$

POLYÉDROS REGULARES

O **volume** é egual ao producto da área pela terça parte do apothema :

$$V = \text{Área} \times \frac{Ap}{3}$$

Problema 294. — Qual o volume de um octaédro regular cujo apothema é egual a $0^{m},033$ e a área total egual a $55^{cm2},4240$?

$$\text{O volume} = 55{,}4240 \times \frac{33}{3} = 0^{cm3},609664.$$

EXERCICIOS

1. — Edina! que é medir o volume de um corpo?
2. — Para que duas pyramides sejam equivalentes que é necessario?
3. — A que é egual o volume de um parallelepipedo rectangulo?
4. — Qual a fórmula?
5. — Como chegamos a esta conclusão?

6. — Porque é que o volume de um parallelepipedo qualquer é egual ao producto da área da base pela altura?
7. — Quaes as fórmulas que se deduzem d'esta :

$$V = C \times L \times A ?$$

8. — Que fórmula é esta : $V = a^3$
9. — Por que razão o volume de um prisma triangular é egual ao producto da área da base pela altura?
10. — A que é egual uma aresta de um cubo?
11. — Que se póde determinar, conhecida a área de uma face e o apothema de um cubo?
12. — Dado o volume e o apothema de um cubo, que se póde determinar?
13. — Que quer dizer

$$A\,p = \frac{3 \times V}{A\,T} ?$$

14. — A que é egual o volume de um prisma triangular?
15. — Da fórmula $V = B \times A$ quaes as outras que se deduzem?
16. — A que é egual o volume de um prisma qualquer?
17. — Porque razão?
18. — $V = B \times \frac{A}{3}$. Que fórmula é esta?
19. — Como chegaste a esta conclusão?
20. — Que fórmulas se deduzem de $V = \frac{B \times A}{3}$?
21. — Qual a fórmula para calcularmos o volume de um cylindro de base circular?
22. — A que é egual o volume de um cône de base circular?
23. — A que é egual o volume de um prisma triangular truncado?
24. — $V = B\left(\frac{A + A' + A''}{3}\right)$. Que significa isto?
25. — A que é egual o volume de uma pyramide triangular truncada, de bases parallelas?
26. — Dize que indica a fórmula :

$$V = \frac{A}{3} \times (b + B + \sqrt{b \times B})$$

27. — O volume de um tronco de cône de bases parallelas a que é egual?
28. — A que é egual o volume de uma esphera?
29. — Qual a fórmula?
30. — $V = 0{,}5236 \times D^3$. Que quer dizer isto?
31. — O volume de um sector espherico a que é egual?
32. — O volume de um segmento como se determina?
33. — $V = \frac{v \times n}{360}$. Traduze.
34. — $V = \frac{v \times n}{21600}$. Traduze.
35. — De quantos modos podemos determinar o volume de um corpo irregular?
36. — Que é densidade?
37. — Como podes determinar o peso de um corpo?
38. — A que é egual o volume de um polyédro regular?
39. — Qual o volume de um cubo de $0^m{,}62$ de aresta?
40. — Qual o volume de um cubo de $42^m{,}80$ de aresta?
41. — O volume de um cubo é egual a $8^{m3}{,}998912$; qual a medida de uma das arestas?
42. — Qual o volume de um prisma recto de 42^m de altura e 20^m de perimetro da base?
43. — Qual o volume de uma caixa de phosphoros?
44. — Qual o volume de um prisma recto cuja base tem 6^{m2} e a altura $2^m{,}50$?
45. — Qual o volume de um prisma heptagonal regular de $0^m{,}4$ de altura, tendo o lado do heptagono da base $0^m{,}02$?
46. — Qual o volume de um prisma heptagonal regular cujo perimetro da base mede $8^m{,}22$ e a altura do prisma $0^m{,}04$?
47. — Qual o volume de um prisma octogonal regular de $0^m{,}82$ de altura, tendo o lado da base $0^m{,}05$?
48. — Uma caixa mede interiormente $0^m{,}20$ de comprimento, $0^m{,}16$ de largura e $0^m{,}10$ de altura. A madeira tem $0^m{,}008$ de espessura. Qual o volume exterior d'essa caixa?
49. — Para se cobrir um quintal de uma camada de areia da espessura de $0^m{,}05$, quanto se gastará sabendo-se que cada metro cubico de areia custa 6$000 e que o quintal mede 12^m de fundo por 8^m de largura?
50. — Uma pessôa vae fazer uma plantação de violetas e para isso dispõe de 8 caixotes de $0^m{,}60$ de comprimento, $0^m{,}40$

de largura, $0^m{,}29$ de altura. Pede-se o volume de terra que ella necessita para encher todos elles ficando, em cada um, o nivel da terra a $0^m{,}04$ abaixo das bordas.
51. — Se tirarmos as diagonaes de um quadrado de $4^m{,}40$ de lado, qual será: 1.º a área de um dos triangulos rectangulos; 2.º o volume do prisma que tiver para base o quadrado e $1^m{,}82$ de altura?
52. — Qual o peso de um bloco de pedra de fórma prismatica tendo $0^m{,}60$ de comprimento, $0^m{,}52$ de largura e $0^m{,}28$ de altura? (Um decimetro cubico d'essa pedra pesa 4280 g.).
53. — Qual o peso do ar contido em uma sala de 15^m de comprimento, 6^m de largura e $5^m{,}5$ de altura, se o litro de ar pesa 129 centigrammas?
54. — Qual o peso de um bloco de pedra de fórma cubica, s a aresta mede $2^m{,}25$ e um decimetro cubico d'essa pedra pesa 2 Kg.
55. — Qual o volume de ar que a sala da aula contém?
56. — E qual o peso d'esse ar se um litro d'elle pesa 31 g. 3?
57. — Uma bomba dá de cada jacto $2^l{,}52$ d'agua, e póde-se obter 30 jactos por minuto. Com quantos jactos poderemos encher um tanque de $2^m{,}80$ de comprimento, $1^m{,}60$ de largura e $1^m{,}30$ de altura?
58. — A área de uma das faces interiores de um caixão de fórma cubica mede $0^{m2}{,}4624$ e o apothema $0^m{,}34$; qual o volume d'esse caixão? Quantos litros de arroz poderá conter?
59. — Quantos litros d'agua poderão encher uma caixa de $10^m{,}5$ de comp., $4^m{,}2$ de larg. e $3^m{,}5$ de altura?
60. — Quantos baldes de 10 litros poderão encher uma caixa de $2^m{,}40$ de comp., $1^m{,}60$ de larg. e $0^m{,}90$ de alt.?
61. — Uma perna de serra mede 6^m de comp., $0^m{,}075$ de larg. e tem um volume de $0^{m3}{,}013500$; pede-se a altura.
62. — Qual a altura de um prisma cuja área da base $= 0^{m2}{,}1296$ e o volume $= 0^{m3}{,}103680$?
63. — Uma gaveta tem $0^m{,}48$ de largura e $0^m{,}08$ de altura, seu volume é de $24^{dm3}960$; qual o seu comprimento?
64. — Um tijolinho de chocolate mede $0^m{,}035$ de comp.; $0^m{,}008$ de altura e tem um volume egual a $5^{cm3}{,}040$; qual a largura d'esse tijolinho?
65. — O volume de um caixão é egual a 120^{dm3}, a altura mede $0^m{,}5$; qual é a base d'esse caixão?

66. — O volume de um bloco de madeira de fórma cubica é de $1^{m3},259712$ e o apothema (metade de uma aresta) é egual a $0^{m},54$; qual a área total d'esse bloco?

67. — Um proprietario manda abrir ao longo de seu sitio uma valla de $130^{m},80$ de comprimento, cujo córte transversal é egual a um rectangulo de $1^{m},40 \times 0^{m},8$. Pede-se a despeza occasionada pela excavação d'essa valla, sabendo-se que o metro cubico fica a 3$500.

68. — Uma regua de ferro tem $0^{m},40$ de comp., $0^{m},04$ de larg. e $0^{m},002$ de espessura Pede-se seu volume e seu peso sabendo-se que um centimetro cubico de ferro pesa 778 centigrammas.

69. — Uma columna de ferro de fórma prismatica hexagonal regular mede 5^{m} de altura e um dos lados da base $0^{m},12$; esta columna é ôca; o orificio interior é cylindrico e mede $0^{m},09$ de diametro. Pede-se o volume do ferro em decimetros cubicos.

70. — Um tanque rectangular tem no interior as seguintes medidas: comprimento $= 2^{m},50$, largura $= 1^{m},60$ e profundidade $= 0^{m},9$. A parede que o cérca tem $0^{m},44$ de espessura; pede-se: 1.° o volume d'essa parede; 2.° o volume d'agua que o tanque poderá conter; 3.° o tempo que levará uma torneira a esvasial-o, se em um quarto de hora tirar um decalitro d'agua; 4.° o espaço que occupa esse tanque.

71. — Qual o volume de uma pyramide quadrangular cujas arestas medem, cada uma, $0^{m},96$?

72. — Qual o volume de uma pyramide cuja altura mede 6 metros e a área da base $= 5^{m2},76$?

73. — Qual o volume de uma pyramide triangular cujas medidas são: altura $= 4$ metros e a base é um triangulo equilatero de $1^{m},20$ de lado?

74. — Qual o volume de uma pyramide triangular cuja altura mede 8 metros e cujo triangulo da base tem por medida dos lados: $1^{m},80$; $1^{m},60$; $2^{m},40$?

75. — Qual o volume de uma pyramide pentagonal regular cuja altura mede $4^{m},80$ e o lado do pentagono $5^{m},3$?

76. — Qual a altura de uma pyramide cujo volume é egual a $2^{m3},700$ e a área da base 4^{m2}?

77. — Um peso para papeis, de fórma pyramidal, mede $0^{m},07$ de altura e tem um volume $= 4^{m3},725$. Pede-se a área da base.

78. — A base de uma pyramide de crystal mede 169^{m2} e o olume d'essa pyramide é de $1^{dm3},409$: qual a altura?

79. — Qual o peso de um bloco de marmore de fórma pyramidal, cujas dimensões são: altura $= 0^{m},60$, área da base $= 0^{m2},36$ e a densidade do marmore sendo de 2,71?

80. — Qual o volume total de um cubo de $0^{m},04$ de aresta, tendo sobre cada face uma pyramide de $0^{m},06$ de altura?

81. — Um tijolinho de pó insecticida tem a fórma de uma pyramide cujo perimetro da base é egual a $0^{m},036$ e a altura $= 0^{m},04$; sabendo-se que cada centimetro cubico é queimado em 50' pede-se o tempo preciso para que elle se consuma.

82. — Um marco collocado entre dois paizes é um monolitho de fórma pyramidal regular, sua base tem para perimetro $0^{m},81$ e a altura $1^{m},20$. Qual a sua área lateral? — Qual a sua área total? — Qual o seu volume?

83. — Um peso tem a fórma de uma pyramide regular truncada de bases parallelas. O perimetro da base maior $= 0^{m},12$, o da base menor $= 0^{m},09$ e a altura, $= 0^{m},081$. Qual a sua área lateral? — Qual a área total? — Qual o volume?

84. — Qual o volume de terra que é preciso tirar para fazer um poço de $2^{m},20$ de diametro e 5 metros de profundidade?

85. — Em um vestibulo de Estação de Estrada de Ferro ha 8 columnas cylindricas de marmore, de 9 metros de altura e 6 centimetros de diametro. Pede-se o valor de cada uma, se o metro cubico custou 450$000.

86. — Em um circo de 12 metros de raio deseja-se collocar uma camada de serragem de $0^{m},12$ de altura. Quantos metros cubicos serão precisos?

87. — Em um jardim ha um tanque circular de 24 metros de circumferencia interior, contendo agua na profundidade de $0^{m},48$. Qual o volume d'agua contida nesse tanque?

88. — Quantos decalitros d'agua pódem encher um poço cylindrico de 12^{m} de profundidade e 14 decimetros de diametro interior?

89. — Qual o volume de um poço de fórma cylindrica cuja área da base mede $5^{m2},82$ e a altura $= 7$ metros?

90. — Qual o volume de um lapis cylindrico de $17^{cm},5$ de comp. e 7 millimetros de diametro de uma das extremidades?

91 — Qual o volume de um cylindro recto de base circular, cuja altura $= 0^{m},89$ e o raio de uma das bases $= 0^{m},06$?

92. — Qual o volume de um cano de chumbo de $0^m,04$ de diametro interior, $0^m,005$ de espessura e 30 metros de comprimento?

93. — Com um litro de tinta, quantos tinteiros poderei encher, tendo cada um o receptaculo de fórma cylindrica cujo diametro $=0^m,043$ e a altura $=0^m,052$?

94. — Quantos litros de assucar poderão encher uma lata cylindrica de $0^m,25$ de altura e cuja base seja egual a $64^{cm2},6416$?

95. — Qual a altura de um cylindro recto de base circular cujo volume mede $4^{m3},566$ e a base $2^{m2},25$?

96. — Em um reservatorio circular de 6 metros de raio ha 15 800 litros d'agua; a que altura se eleva esta agua?

97. — Qual a área da base de um cylindro recto cujo volume $= 64^{dm3}$ e a altura $= 0^m,08$?

98. — Qual o peso de uma mó cujo diametro é egual a $0^m,90$, a espessura $=0^m,14$ e cujo orificio central mede $0^m,022$ de lado e é quadrado? Sabe-se que o dec. c. pesa 2 Kg, 760.

99. — Sendo a densidade do ferro fundido de 7,21, qual o peso de uma columna cylindrica e massiça de $1^m,65$ de comprimento e $0^m,28$ de diametro?

100. — Qual o peso de uma columna cylindrica, de ferro fundido, de $4^m,84$ de altura e de $0^m,62$ de circumferencia? A densidade do ferro fundido é de 7,21.

101. — Uma torre cylindrica de 24 metros de altura e $6^m,60$ de diametro termina por uma cobertura de fórma conica de $2^m,40$ de altura. Qual o volume da torre com a cobertura?

102. — Um bastão de chocolate tem a fórma de um cylindro obliquo, o diametro da secção recta $= 0^m,012$ e a geratriz $= 0^m,04$. Que quantidade de bastões reduzidos a pó será preciso para encher uma lata cylindrica de $0^m,08$ de diametro e $0^m,12$ de altura?

103. — Qual o volume de um cône recto cuja altura mede $1^m,42$ e a circumferencia da base $2^m,88$?

104. — Qual o volume de um cône recto cuja altura mede 245 millimetros e o raio da base $0^m,023$?

105. — Qual o volume de um cône recto cuja altura mede $0^m,12$ e a área da base $4^{dm2},50$?

106. — Qual a base de um cône recto cuja altura $= 0^m,82$ e o volume $= 1^{m3},800$?

107. — Qual a altura de um cône recto cujo volume é egual a 8^{m3} e a base $= 6^{m2},16$?

108. — Qual o peso de um pão de assucar de fórma conica, tendo a circumferencia da base $0^m,62$, a altura $0^m,70$ e sendo a densidade do assucar de 1,60?

109. — Qual o volume de um monte de areia da fórma de um tronco de pyramide cujas bases são parallelas e quadradas; sendo o lado de uma $= 0^m,82$, o lado da outra $= 0^m,54$ e a altura do tronco $= 0^m,95$?

110. — Qual o volume de um tronco de cône de bases parallelas, cujo raio da base menor $= 24$ centimetros, o da base maior $= 0^m,42$ e a altura do tronco $= 5^m,5$?

111. — Qual o volume de um tronco de cône de bases parallelas, sabendo-se que a base maior $=225^{cm2}$, a base menor $= 144^{cm2}$ e a altura do tronco 80 centimetros?

112. — Qual a capacidade de uma leiteira da fórma de um tronco de cône cuja altura $= 0^m,32$, o diametro da base $= 0^m,18$ e o da bocca $= 0^m,10$?

113. — Qual é, em decilitros, a capacidade de um balde da fórma de um tronco de cône, sabendo-se que os raios das duas bases medem respectivamente $0^m,28$ e $0^m,36$ e que a profundidade do balde $= 0^m,48$?

114. — Qual o volume de uma esphera de $0^m,68$ de raio?

115. — Qual o volume de uma esphera de $0^m,025$ de raio?

116. — Qual o volume de uma esphera cuja área $= 7^{m2},84$?

117. — Qual o volume de gaz necessario para encher um balão de borracha de $0^m,22$ de diametro?

118. — Qual o raio de uma esphera cujo volume $= 640^{dm3}$?

119. — Quantos litros poderão encher uma esphera ôca, cujo diametro interior $= 0^m,72$?

120. — O globo terrestre que está na classe tem um diametro de $0^m,55$. Pede-se o seu volume e a sua área.

121. — Qual o volume de um sector espherico que faz parte de uma esphera de $0^m,42$ de raio, sabendo-se que a zona que lhe serve de base tem de altura $0^m,03$?

122. — Qual o volume de uma cunha espherica cujo angulo é egual a 120° e o raio da esphera, da qual faz parte, é de $0^m,92$?

123. — Qual o volume de uma unha espherica cujo angulo = 70°30′ sabendo-se que o raio da esphera da qual faz parte mede $0^{m},64$?

124. — Qual o volume de uma unha ou cunha espherica cujo angulo = 30°52′40″ sabendo-se que o raio da esphera a que pertence mede $1^{m},54$?

125. — Quaes os volumes de uma laranja; — de um limão; — de um ovo; — de uma goiaba?

(O professor terá na classe um copo grande, um prato e um vaso graduado).

CAPITULO XX

SUMMARIO : **Concordancia de linhas.**

CONCORDANCIA DE LINHAS.

Chama-se **concordancia** ou **arredondamento de linhas** á reunião de duas ou mais linhas de sorte que nos pontos de juncção ellas sejam tangentes e portanto não offereçam *saltos, tortuosidades* nem *inflexões*.

A **concordancia das linhas** se basêa em :

1.° Uma recta e um arco de circulo se concordam, quando o centro do arco se acha na perpendicular á recta dada, pelo ponto de concordancia ou de tangencia ;

2.° Dois arcos se concordam quando o ponto de contacto e os dois centros estão em uma mesma recta.

Arco é a linha que marca o contorno de uma *abobada* (*).

Pontos de nascença de um arco são os pontos de tangencia do arco com as rectas que terminam no começo da curva (A e B, fig. 580).

Vão ou ***abertura*** de um arco é a distancia em linha recta entre os pontos de nascença (AB, fig. 580).

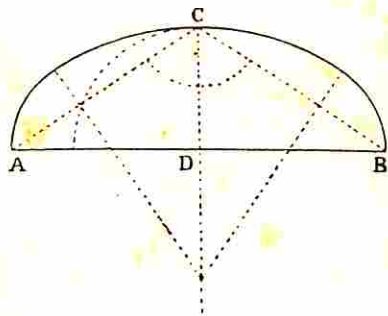



Fig. 580.

Altura ou ***flecha*** de um arco é a perpendicular abaixada do meio do arco sobre a recta horizontal que passa pelos pontos de nascença do mesmo arco (CD, fig. 580).

Arco abatido é a curva cujos extremos ou pontos de nascença estão n'uma mesma recta horizontal e cuja altura ou flecha é menor do

(*) **Abobada** é uma construcção geralmente feita de tijolo ou de pedra apresentando uma superficie inferior, curva e concava, destinada a cobrir o espaço comprehendido entre duas paredes verticaes.

Encontra-se geralmente a abobada em janellas, portas, respiradouros, escadas, pontes e viaductos.

que a metade do vão, isto é, da distancia dos dois pontos extremos (fig. 580).

A ***aza de cesto*** é um arco abatido formado de arcos de circulos (fig. 581).

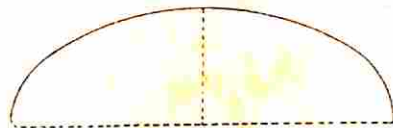



Fig. 581.

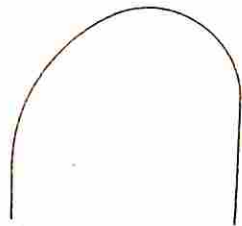



Fig. 582.

Arco aviajado ou ***esconso*** (fig. 582) é uma curva polycentrica cujos pontos de nascença não estão sobre uma mesma recta horizontal, isto é, no mesmo nivel de duas rectas parallelo-perpendiculares.

Problema 295. — Em uma das extremidades de uma recta dada, descrever um arco de circulo que passe por um ponto tambem dado e concorde com a recta.

MN é a recta, (fig. 583), M a extremidade escolhida e A o ponto dado.

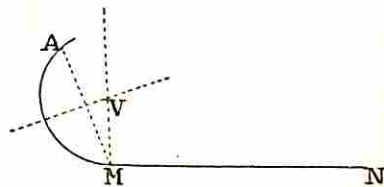



Fig. 583.

Levantemos pelo ponto M uma perpendicular a MN, unamos A a M e pelo meio d'essa recta façamos passar uma perpendicular, que determinará na primeira o ponto V, que é o centro do arco cujo raio é V M.

Tracemos esse arco que, partindo de M, passará por A.

Problema 296. — Reunir, por meio de concordancia, duas rectas convergentes.

M e N (fig. 584) são as duas rectas dadas.

Fig. 584.

Prolonguemol-as até o ponto V do qual, como centro, e com um raio arbitrario determinemos os pontos E e F equidistantes de V.

Pelo ponto F levantemos uma perpendicular á recta M e pelo ponto E uma outra perpendicular á recta N.

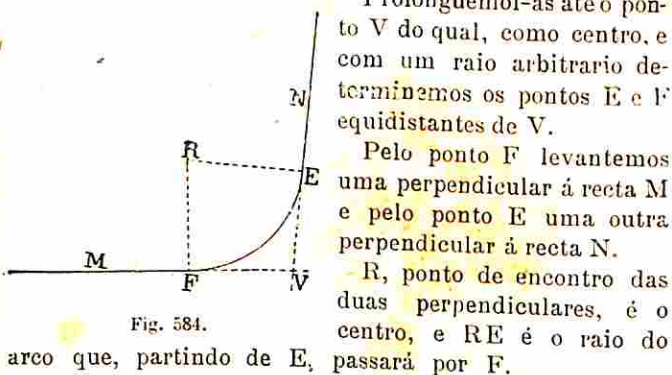
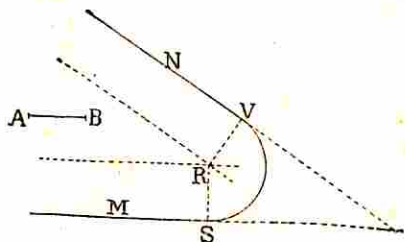
R, ponto de encontro das duas perpendiculares, é o centro, e RE é o raio do arco que, partindo de E, passará por F.

Problema 297. — Reunir por meio de arredondamento duas rectas convergentes, conhecendo-se o raio do arco de concordancia.

Fig. 585.

M e N são as duas rectas e AB é o raio do arco (fig. 585).

Tracemos duas parallelas ás rectas M e N distantes d'estas, a medida AB. As parallelas determinam o ponto R, do qual façamos partir as rectas RV e RS perpendiculares a N e M.

Do ponto R, como centro, e com um raio RV descrevamos a arco VS que liga as duas rectas convergentes.

Problema 298. — Concordar uma recta com um arco de circulo por meio de um outro cujo raio é conhecido.

M é a recta (fig. 586) e C é o centro do arco conhecido.

Tracemos uma parallela á recta M e distante d'ella a medida AB.

Do ponto C, como centro e com um raio que seja egual

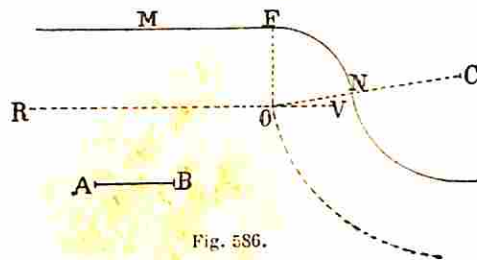



Fig. 586.

ao do arco conhecido mais AB, cortemos a parallela RV no ponto O. Tracemos a recta OC e do ponto O, com um raio egual a ON, descrevamos o arco de concordancia NF.

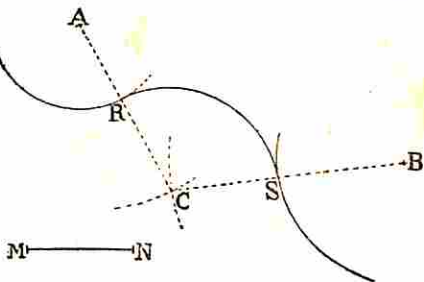
Problema 299. — Concordar dois arcos de circulo por meio de um terceiro cujo raio é conhecido.

Fig. 587.

A e B são os centros dos dois arcos conhecidos (fig. 587) e MN é o raio do terceiro arco.

Dos pontos A e B, como centros e com os raios respectivamente eguaes aos dos arcos, augmentados de MN, determinemos o ponto C.

Unamos esse ponto a A e B e determinaremos os pontos de contacto R e S.

De C, como centro, e com um raio CR, descrevamos o arco RS.

Problema 300. — Concordar duas rectas parallelas quando terminam em um mesmo plano que lhes é perpendicular ou mediante uma semi-circumferencia.

BN e PM são as duas parallelas (fig. 588).

Tiremos a recta BP, perpendicular commum ás duas parallelas.

Com o centro em A (meio de BP) e com um raio egual a AB tracemos a semi-circumferencia BFP que ligará as duas parallelas sem produzir inflexões.

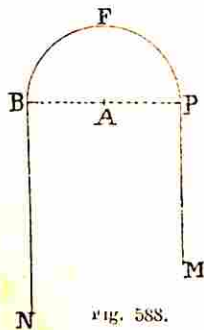
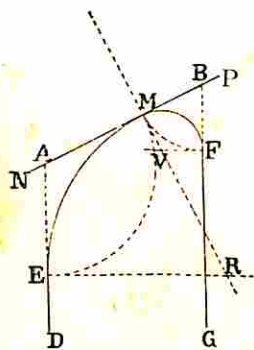



Fig. 588.

Problema 301. — Traçar um arco aviajado conhecendo-se o ponto de tangencia dos dois arcos, a tangente commum e as parallelas que passam pelos pontos de nascença.

M (fig. 589) é o ponto de tangencia dos dois arcos, NP é a tangente commum aos dois arcos e AD e BG as duas rectas parallelas.

Façamos passar pelo ponto M uma perpendicular á recta NP.

Centro em B e com um raio egual a BM descrevamos o arco MF, e centro em A e com um raio AM descrevamos o arco ME.

Fig. 589.

Pelos pontos E e F (pontos de nascença) tracemos as rectas FV e FR perpendiculares ás parallelas AD e BG.

Façamos centro em V e com um raio egual a VM descrevamos o arco FM, e de R, como centro, com o raio RM descrevamos o arco ME. EM + MF é o arco aviajado.

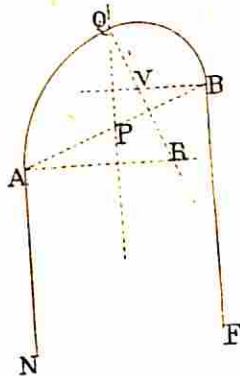
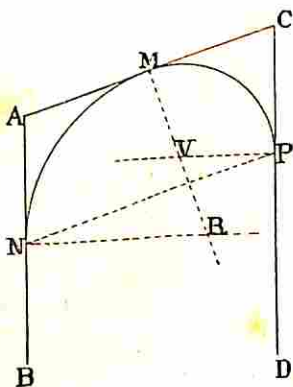
Problema 302. — Construir um arco aviajado conhecendo-se os pontos de nascença e a direcção da recta tangente a um d'esses pontos.

A e B são os pontos de nascença e AN é a tangente pelo ponto A (fig. 590).

Unamos A a B e pelo meio façamos passar uma recta parallela a AN, levantemos pelos pontos A e B perpendiculares ás rectas AN e BF.

Transportemos em PQ a medida PA e tiremos pelo ponto Q uma perpendicular á recta AB.

Fig. 590.

Esta perpendicular determinará os pontos R e V centros dos arcos AQ e QB que formam o arco aviajado.

Problema 303. — Traçar um arco aviajado conhecendo-se as parallelas que passam pelos pontos de nascença, sendo o ponto de tangencia dos arcos componentes, o meio da obliqua que une as duas parallelas.

Sejam AB e CD as parallelas e AC a obliqua (fig. 591).

Marquemos o ponto M (meio da obliqua) que será o de tangencia dos dois arcos que formam a curva pedida.

Façamos AN = AM = CP e tracemos de N e de P duas parallelas perpendiculares a AB.

Fig. 591.

Unamos N a P e do ponto M abaixemos uma perpendi-

cular a essa recta, determinando os pontos : R na recta que partiu de N, e V na que partiu de P.

Façamos centro em R e com um raio RN descrevamos o arco NM, e do ponto V, com o raio VM descrevamos o arco MP.

NMP é o arco aviajado.

Problema 304. — Traçar uma aza de cesto de tres centros conhecendo-se o vão e a flecha.

Pelo meio de AB (fig. 592), vão do arco, façamos passar

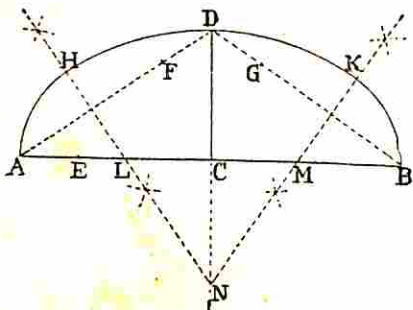



Fig. 592.

uma perpendicular e marquemos CD egual á altura dada; unamos A e B ao ponto D.

Tomemos CE=CD e marquemos DF e DG eguaes cada uma a AE.

Pelos meios de AF e BG tracemos rectas perpendiculares que determinarão o ponto N.

De L e M e com o mesmo raio LA ou MB descrevamos os arcos AH e BK; finalmente do ponto N e com um raio NH descrevamos o arco HDK.

AHDKB é a aza de cesto tricentrica.

Problema 305. — Traçar uma aza de cesto de cinco centros conhecendo-se o vão e a flecha.

AB é o vão e CD é a flecha (fig. 593).

Dividamos AB ao meio e do ponto C descrevamos duas semi-circumferencias; uma com o raio CA e outra com o raio CD.

Dividamos cada uma d'estas semi-circumferencias em seis partes eguaes (veja-se a trisecção do angulo recto); pe-

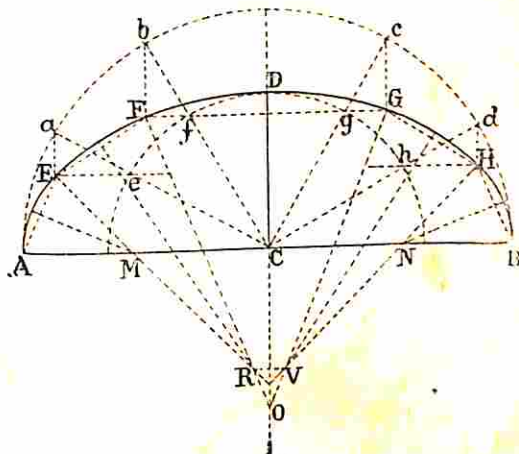



Fig. 593.

los pontos *a*, *b*, *c*, *d* tracemos rectas parallelas a CD e por *e*, *f*, *g*, *h* rectas parallelas a AB : estas encontram aquellas em E, F, G, H.

Tracemos as rectas AE, EF, GH, HB e pelo meio de AE, EF, GH e HB façamos passar perpendiculares.

Duas d'estas determinam os pontos M e N na recta AB.

Tiremos as rectas EM e HN prolongando-as até determinarem os pontos R e V; aquelle no prolongamento da perpendicular ao meio de EF e este no prolongamento da perpendicular ao meio de GH.

Tracemos as rectas FR e GV prolongando-as tambem ate o ponto O. De M e N, com o raio MA descrevamos os arcos AE e BH; de R e V, com o raio RE descrevamos EF e HG; finalmente do ponto O, com o raio OF descrevamos o arco FG.

Problema 306. — Traçar uma aza de cesto de sete centros sendo conhecidos o vão e a flecha.

MN é o vão e AB é a flecha (fig. 594).

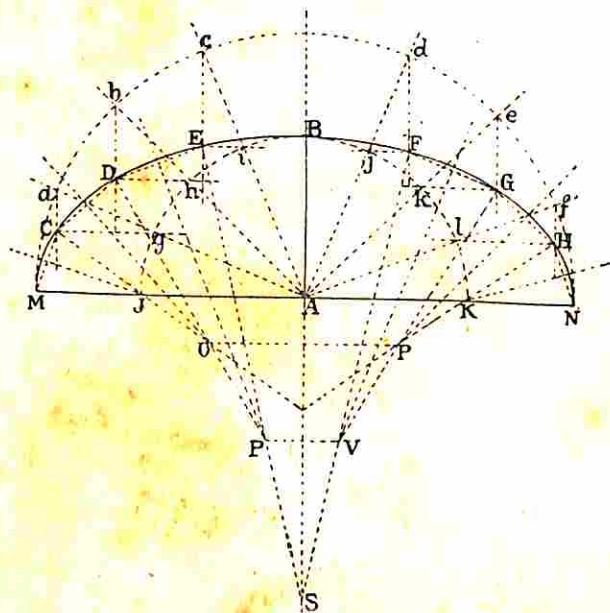



Fig. 594.

Descrevamos duas semi-circumferencias concentricas em A e com os raios AM e AB.

Dividamol-as em oito partes eguaes; pelos pontos *a*, *b*,

c, *d*, *e*, *f* tracemos rectas parallelas a AB e pelos pontos *g*, *h*, *i*, *j*, *k*, *l*, rectas parallelas a MN.

Todas estas parallelas determinam os pontos C, D, E, F, G, H.

Para termos os centros dos 7 arcos que compõem a aza de cesto procedamos da seguinte maneira: J e K são as intersecções das perpendiculares ao meio de MC e HN com a recta MN; O e P resultam das intersecções das perpendiculares ao meio de CD e GH com os prolongamentos de CJ e HK; P e V são as intersecções das perpendiculares ao meio de DE e FG com os prolongamentos das rectas DO e GP, e por ultimo o ponto S é o resultado do encontro das rectas EP e FV.

Descrevamos portanto os arcos que formarão a aza de cesto.

EXERCICIOS

1. — Eduardo! Que é concordancia de linhas?
2. — Em que se basêa a concordancia das linhas?
3. — Que são saltos, tortuosidades, inflexões?
4. — Que é um arco?
5. — Que é uma abobada?
6. — Já viste alguma abobada? — onde?
7. — Que são pontos de nascença?
8. — Que é um vão ou abertura de um arco?
9. — Que é altura ou flecha de um arco?
10. — Que é um arco abatido?
11. — Onde já viste um arco abatido?
12. — Que é uma aza de cesto?
13. — Que é um arco aviajado?
14. — Traça uma recta, marca um ponto fóra d'essa recta e traça um arco de circulo que passe pelo ponto e concorde com a recta.
15. — Traça duas rectas convergentes e liga-as sem formar inflexões.

16. — Com um raio egual a $0^m,02$ concorda duas rectas convergentes.

17. — Traça uma recta e um arco e liga-os sem apresentar saltos nem inflexões.

18. — Traça dois arcos de circo e concorda-os por meio de um terceiro de $0^m,03$ de raio.

19. — Traça duas rectas parallelas que terminem em um mesmo plano e arredonda-as.

20. — Traça um arco aviajado com os seguintes elementos: o ponto de tangencia dos dois arcos que o compõem, a tangente commum, e as parallelas que passam pelos pontos de nascença.

21. — Traça um arco aviajado com os seguintes dados: os pontos de nascença e a direcção da recta tangente á um d'esses pontos.

22. — Traça um arco aviajado conhecendo: as rectas parallelas que passam pelos pontos de nascença, sendo o ponto de tangencia dos arcos o meio da obliqua que une as duas parallelas.

23. — Traça uma aza de cesto tricentrica cujo vão seja egual a $0^m,05$ e a flecha a $0^m,02$.

24. — Idem, idem, sendo o vão egual a $0^m,06$ e a flecha a $0^m,025$.

25. — Traça uma aza de cesto de cinco centros sendo o vão egual a $0^m,06$ e a flecha a $0^m,02$.

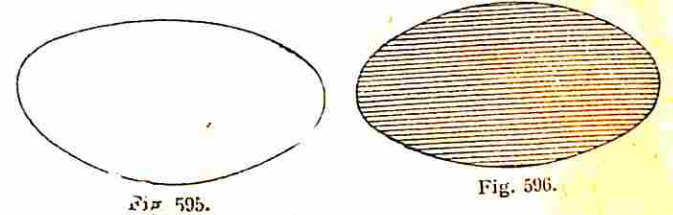
26. — Traça uma aza de cesto de 7 centros sendo o vão egual a $0^m,08$ e a flecha egual a $0^m,03$.

CAPITULO XXI

SUMMARIO : **Ellipse. — Falsa ellipse. — Oval. — Espiral. — Voluta. — Helice. — Parabola. — Hyperbole.**

ELLIPSE.

A uma linha curva, plana e fechada em que a somma das distancias de cada um de seus pontos a dous pontos interiores fixos é constante, dá-se o nome de **ellipse** (fig. 595).

Fig. 595. Fig. 596.

A porção do plano limitada pela **ellipse** chama-se ***superficie elliptica*** (fig. 596).

Os pontos fixos chamam-se ***fócos;*** E e F (fig. 597) são os ***fócos.***

A **ellipse** é a curva descripta pelos *co-*

metas periodicos ao redor do sol que occupa um dos ***fócos.***

A Terra e os outros planetas tambem descrevem **ellipses** ao redor do sol.

Com a fórma elliptica ha innumeros objectos: mesas, molduras, caixas, medalhões, joias, espelhos, rotulos, bandejas, etc.

As rectas que se cortam perpendicularmente ao meio e que dividem a curva em quatro partes eguaes chamam-se ***eixos*** da **ellipse;** AB e CD são os ***eixos*** da **ellipse** (fig. 597). Á maior recta dá-se o nome de ***eixo maior;*** e á menor, ***eixo menor.***

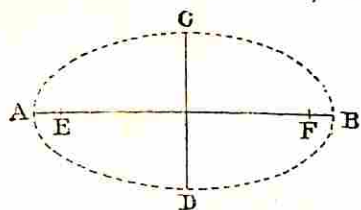



Fig. 597.

No ***eixo maior*** estão situados os ***fócos.***

As rectas que unem os ***fócos*** a qualquer ponto da curva tomam o nome de ***raios vectores.*** EM e FM são os ***raios vectores*** na figura 598.

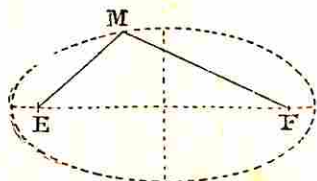



Fig. 598.

A somma de dous ***raios vectores*** é egual

ao ***eixo maior.*** As extremidades dos ***eixos*** de uma **ellipse** chamam-se ***vertices.*** A, B. C e D são os ***vertices*** da **ellipse** representada na fig. 597.

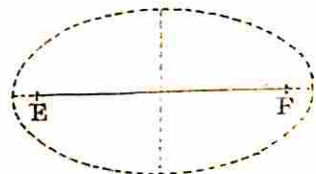



Fig. 599.

Á parte do ***eixo maior*** entre os dous ***fócos*** dá-se o nome de ***distancia focal*** (fig. 599). O ponto de intersecção dos ***eixos*** chama-se ***centro*** da **ellipse;** as rectas que partem do ***centro*** e terminam na curva chamam-se ***raios.*** OG, OH, OJ e OK (fig. 600) são os ***raios*** da **ellipse.**

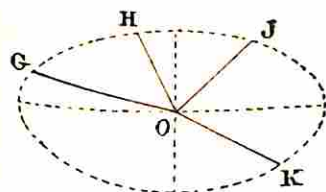
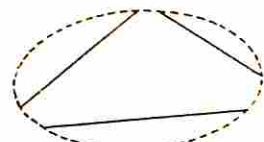



Fig. 600.

Fig. 601.

Qualquer recta que passe pelo ***centro*** tendo as extremidades na curva, recebe o nome de ***diametro;*** os ***eixos*** são ***diametros*** da **ellipse.**

Qualquer recta traçada na ***superficie elliptiça,*** tendo as extremidades na **ellipse** é uma ***corda*** (fig. 601)

As *cordas* que passam pelos *fócos* e são parallelas ao *eixo menor* chamam-se *parametros.*

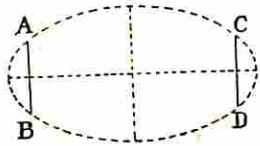
AB e CD (fig. 602) são *cordas* e *parametros* da **ellipse.**

Chama-se *normal* a recta situada fóra da *superficie elliptica* e perpendicular á tangente no ponto de contacto; esse ponto é tambem o *pé* da *normal* (fig. 603).

Fig. 602.

Diametros conjugados são os que estão dispostos de modo que um divide ao meio as cordas parallelas ao outro.

Circumferencia directriz da **ellipse** é a que se descreve de qualquer dos fócos, como centro e com um raio egual ao eixo maior.

Excentricidade de uma **ellipse** é a relação entre a distancia focal e o grande eixo, isto é, a distancia do centro a um dos fócos. A **ellipse** é mais ou menos alongada conforme sua *excentricidade*; quando esta não existe,

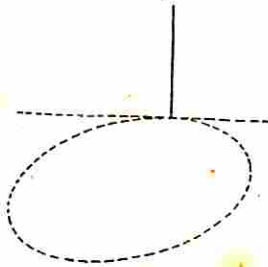



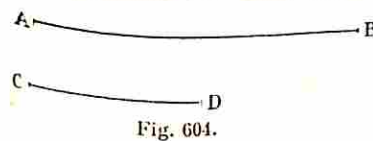
Fig. 603.

os dois fócos se confundem e a **ellipse** se reduz a uma circumferencia de circulo; quando a *excentricidade* é muito pequena, os dois fócos são muito proximos um do outro, os dois eixos são quasi eguaes, a **ellipse** é arredondada e pouco differe de uma circumferencia; finalmente á medida que a **excentricidade** augmenta, os fócos se afastam, a **ellipse** alonga-se e achata-se.

A uma **ellipse** podemos traçar rectas tangentes ou secantes e tambem curvas tangentes ou secantes.

TRAÇADO DA ELLIPSE

Problema 307. — Traçar uma ellipse sendo dados os eixos.

1.º processo: — Com uma linha, dous alfinetes e lapis giz ou carvão. Sejam AB e CD (fig. 604) os eixos de uma ellipse que desejamos traçar sobre cartão.

Façamos passar perpendicularmente pelo meio, um do outro, os dous eixos. Do ponto C (fig. 605) como centro e com um raio egual a OA determinemos os pontos E e F, isto é, os fócos.

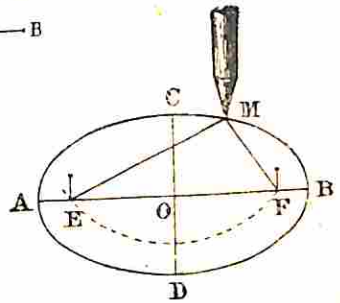



Fig. 605.

Tomemos um fio de linha do comprimento do eixo maior (AB) e fixemol-o com alfinetes, pelas extremidades, nos pontos E e F. Colloquemos na dobra M do fio um lapis e façamol-o andar de modo que o fio se conserve sempre bem esticado; descreveremos uma metade da ellipse. Procedamos do mesmo modo, no outro lado do eixo maior, e teremos a outra metade e portanto a ellipse que desejavamos traçar.

Este processo facillimo de se executar é baseado na propria definição da ellipse e é muito empregado para o traçado d'essa curva em terrenos planos.

Os jardineiros usam d'este processo quando querem dar a um canteiro a fórma elliptica e neste caso os alfinetes são substituidos por estacas, o lapis ou o giz por uma ponteira ou plantador (fig. 606), e a linha por uma corda.

Fig. 606.

2.° processo : — Com uma tira de papel.

Depois de traçarmos os eixos como no 1.° processo, marquemos em uma tira de papel, cortada em linha recta (fig. 607) a distancia MN egual a OB (fig. 608) e a distancia MP = OC. PN exprime a differença dos semi-eixos.

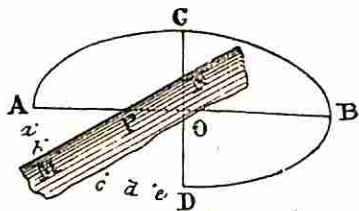



Fig. 607.

Fig. 608.

Appliquemos o ponto N sempre sobre o eixo CD e o ponto P sempre sobre o eixo AB de sorte que o ponto M determine os diversos pontos *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, etc., conforme o ponto N se afaste mais ou menos do ponto O no

eixo CD e o ponto P se afaste tambem do ponto O no eixo AB.

Os pontos *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, etc., bem proximos uns dos outros determinam a passagem da curva; resta-nos traçar a ellipse á mão livre.

3.° processo : — Por meio de duas circumferencias concentricas tendo, cada uma, para diametro um eixo da ellipse.

Uma vez que os eixos estejam dispostos como nos mostra a fig. 605, descrevamos duas circumferencias concentricas : uma com o raio egual á metade do eixo maior AB

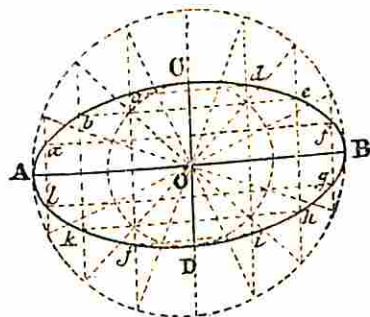



Fig. 609.

(fig. 609) e a outra com o raio egual á metade do eixo menor CD.

Dividamos a circumferencia maior em um numero qualquer de partes eguaes, 16 por exemplo, e tracemos todos os raios que terminam nos pontos de divisão. Estes raios tambem dividem a circumferencia menor em 16 partes eguaes.

Pelos pontos de divisão da circumferencia maior, tracemos rectas parallelas ao eixo menor e pelos pontos de divisão da circumferencia menor, rectas parallelas ao eixo maior.

Os pontos *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *j*, *k*, *l*, A, B, C, D

determinam a ellipse; tracemol-a, portanto, á mão livre.

4.º processo: — Por pontos determinados pelo compasso.

Dividamos a distancia OF (fig. 610) em um numero qualquer de partes eguaes, 6 por exemplo.

Façamos centro em F e com as distancias Aa, Ab, Ac, Ad, Ae descrevamos as diversas curvas como nos mostra a fig. 610 e do ponto E com as distancias aB, bB, cB, dB, eB determinemos os pontos m, n, p, q, r, s, t, u, v, x, os quaes determinam a metade da ellipse. Procedamos do mesmo modo em relação á outra metade do eixo AB e teremos a ellipse completa.

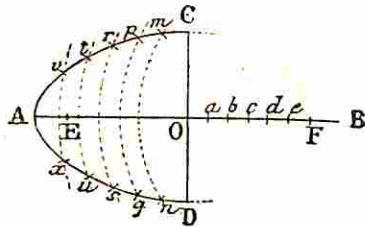



Fig. 610.

Problema 308. — Traçar por um ponto dado em uma ellipse uma recta tangente a essa curva.

Marquemos na ellipse (fig. 611) um ponto qualquer; seja M esse ponto. Do fóco F façamos partir uma recta que passe pelo ponto M; d'este ponto, como centro, e com o raio egual a ME descrevamos o arco EP. Dividamos o angulo EMP em duas partes eguaes, e a recta que passa pelos pontos R e M é a tangente pedida.

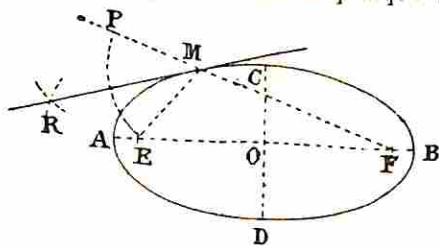



Fig. 611.

Problema 309. — Traçar por um ponto dado, fóra de uma ellipse, uma recta tangente a essa curva.

Seja P (fig. 612) o ponto fóra de uma ellipse.

Do ponto E, como centro, com um raio egual ao grande eixo descrevamos um arco; do ponto P, como centro, com o raio PF descrevamos um segundo arco que cortará o primeiro no ponto H.

Unamos F a H e abaixemos do ponto P uma recta perpendicular a FH; esta perpendicular será a tangente pedida. O ponto de contacto M é determinado pela intersecção d'esta tangente com a recta EH.

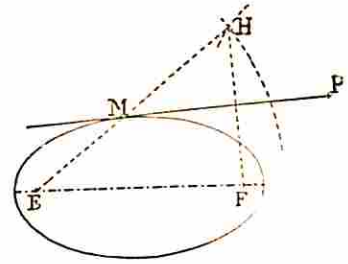



Fig. 612.

NOTA. — Para que este problema seja possivel, é preciso que os dois arcos se cortem e para isso que a distancia EP entre os dois centros seja menor que a somma dos raios e maior que a sua differença, isto é:

$$EP < EH + FP \text{ ou } EP > EH - FP$$

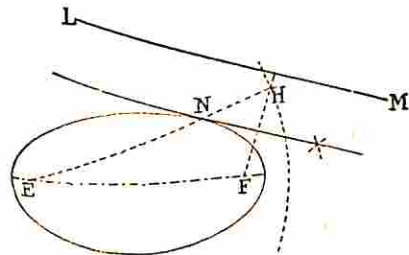
Problema 310. — Traçar uma tangente a uma ellipse e que seja parallela a uma recta dada.

Do fóco E (fig. 613) e com um raio egual ao grande eixo, descrevamos um arco; do ponto F abaixemos sobre a recta dada LM uma perpendicular que cortará o arco no ponto H.

Fig. 613.

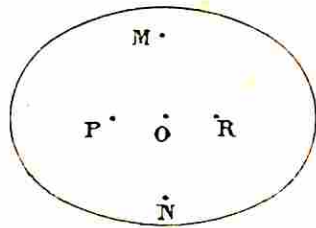
Pelo meio de FH façamos passar uma recta perpendicular, que é a tangente pedida.

O ponto de contacto N é determinado pela intersecção d'esta tangente com a recta EH.

FALSA ELLIPSE.

Semelhante á ellipse ha uma curva plana, fechada, composta de quatro arcos de circumferencia, chamada **falsa ellipse** (*), (fig. 614). A linha recta em relação a esta curva recebe os nomes de *grande eixo, pequeno eixo, raio* e *diametro.*

Fig. 614.

Na fig. 615, AB é o *grande eixo* e CD é o *pequeno eixo.*

A intersecção dos dous *eixos* determina o *centro* da curva.

M, N, P, R são os *centros* dos arcos que formam a **falsa ellipse** representada na fig. 614; o ponto O é o *centro* da curva.

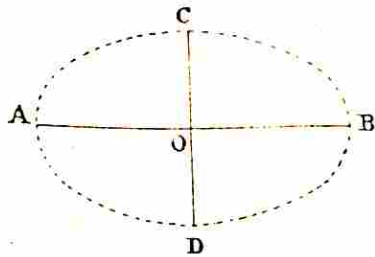



Fig. 615.

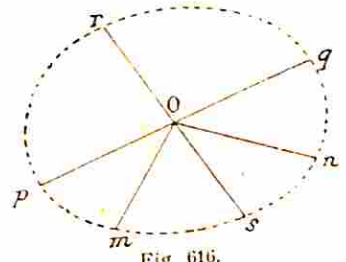
Toda a recta que parte do *centro* e termina na curva é um *raio*, e toda a recta que passa

(*) Esta curva é vulgarmente conhecida pelo nome de oval regular

pelo centro tendo as extremidades na curva é um *diametro*. O*m*, O*n* são raios (fig. 616) e *rs*, *pq* são diametros.

Fig. 616.

A **falsa ellipse** póde ser *alongada* ou *arredondada.*

Se os centros situados no grande eixo forem afastados do pequeno eixo, a curva é *alongada*, e no caso contrario a curva é *arredondada.*

TRAÇADO DA FALSA ELLIPSE

Problema 311. — Traçar uma falsa ellipse sendo dados os dous eixos.

1.° *processo :* — Sejam A B e C D os dous eixos (fig. 617) Tracemos AB e CD perpendicularmente, um pelo meio do outro (fig. 618).

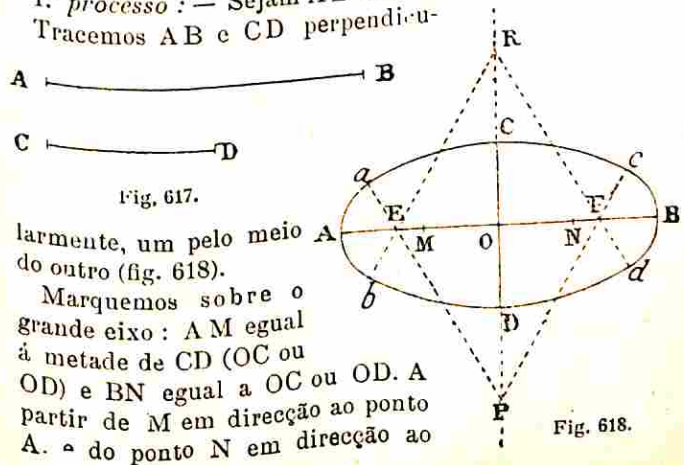



Fig. 617.

Marquemos sobre o grande eixo : A M egual á metade de CD (OC ou OD) e BN egual a OC ou OD. A partir de M em direcção ao ponto A. e do ponto N em direcção ao

Fig. 618.

ponto B marquemos uma distancia egual á terça parte de OM ou ON. Dos pontos A e E, com o raio AE determinemos a e b; de F e B, com o mesmo raio determinemos os pontos c e d. Prolonguemos o eixo menor em um e em outro sentido; unamos o ponto a ao ponto E e prolonguemos a recta até encontrar o ponto P; tracemos as rectas bER, RFd, PFc. O ponto E é o centro do arco aAb; o ponto F o centro do arco cBd; P, o centro de aCc; finalmente R, o centro de bDd.

2.º *processo*: — Tracemos os eixos AB e CD perpendicularmente um pelo meio do outro. Façamos passar

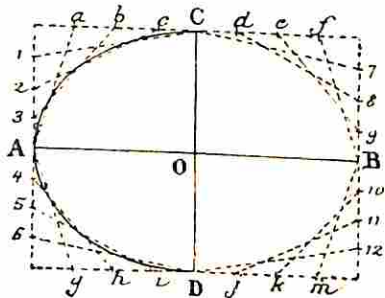



Fig. 619.

pelos pontos C e D (fig. 619) rectas parallelas ao eixo AB e, pelos pontos A e B, rectas parallelas ao eixo CD: obtemos assim um rectangulo. Dividamos cada lado d'esse rectangulo em oito partes eguaes e teremos os pontos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, m.

Unamos os pontos aA, b3, c2, C1, C7, d8, e9, fB, Bm 10k, 11j, 12D, D6, i5, h4, gA.

Os pontos de intersecção, interiores, d'essas diversas rectas determinam a passagem da falsa ellipse.

Problema 312. — Construir uma falsa ellipse arredondada sendo dado o eixo menor.

Seja CD o eixo menor (fig. 620). Façamos passar pelo meio de CD uma perpendicular indefinida. Tomemos a metade de OC como raio e do ponto O marquemos N e M. Unamos os pontos D e N, D e M, C e N, C e M prolongando as rectas DN, DM, CN, CM. Do ponto D tracemos o arco mCn; do ponto C, o arco sDr; do ponto N, o arco ns e do ponto M, o arco mr.

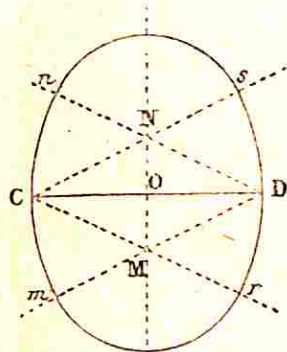



Fig. 620.

Problema 313. — Construir uma falsa ellipse arredondada sendo dado o eixo maior. AB é o eixo maior (fig. 621). Dividamol-o em tres partes eguaes; tracemos os dous triangulos equilateros MNP e MNR, prolonguemos PN, PM, RN, RM. Dos pontos M e N tracemos os arcos nAm e sBv; dos pontos R e P, os arcos ms e nv.

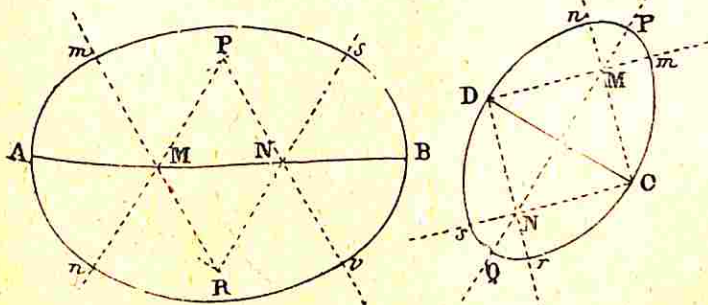



Fig. 621.

Fig. 622.

Problema 314. — Construir uma falsa ellipse alongada sendo dado o eixo menor. DC é o eixo menor (fig. 622). Façamos passar pelo meio de DC uma perpendicular in-

definida. Formemos o quadrado DMNC; prolonguemos CM, CN, DM, DN. Dos pontos C e D descrevamos os arcos *s*D*n* e *m*C*r*; dos pontos M e N, os arcos *n*P*m*, *r*Q*s*.

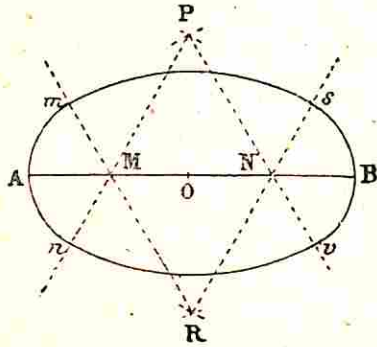



Fig. 623.

Problema 315. — Construir uma falsa ellipse alongada sendo dado o eixo maior.

Seja AB o eixo maior (fig. 623); dividamol-o em quatro partes eguaes. Com uma mesma distancia egual a OB façamos os triangulos equilateros MNR e MNP. Dos pontos M e N tracemos os arcos *m*A*n* e *s*B*v*; dos pontos R e P tracemos os arcos *ms* e *nv*.

OVAL. A uma curva plana, fechada, composta de uma semi-circumferencia, de dous grandes arcos e de um pequeno arco, dá-se o nome de **oval** (*) (fig. 624).

A **oval** pela sua configuração assemelha-se á fórma de um ovo.

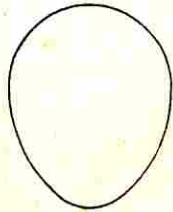



Fig. 624.

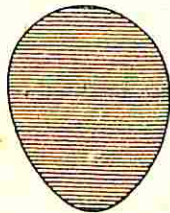



Fig. 625.

A porção do plano limitada pela **oval** chama-se *superficie oval* (fig. 625).

(*) Esta curva é geralmente conhecida por oval irregular.

Na oval representada na fig. 626, AB é o *grande eixo* e CD o *pequeno eixo*; os pontos O, E, C, D são os *centros* dos arcos que fórmam a **oval**.

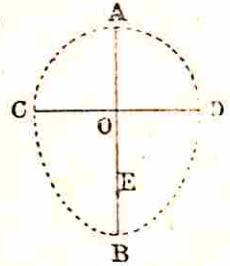



Fig. 626.

Um espelho, uma medalha, uma moldura pódem ter a fórma oval, o contorno longitudinal de um ovo é oval.

TRAÇADO DA OVAL

Problema 316. — Traçar uma oval sendo dado o eixo menor.

Seja CD o eixo menor (fig. 627). Tracemos pelo meio d'esse eixo uma recta perpendicular.

Façamos OA e OM eguaes, cada uma, a OC ou OD;

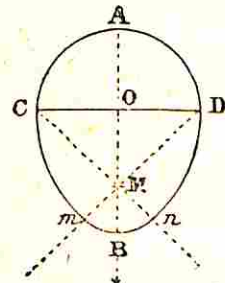



Fig. 627

unamos C e D ao ponto M e prolonguemos as rectas DM e CM.

Dos pontos D e C e com um raio egual a CD descre-

vamos os grandes arcos C*m* e D*n*; do ponto O e com um raio egual a OD descrevamos a semi-circumferencia CAD; e finalmente do ponto M, com um raio egual a M*m* descrevamos o pequeno arco *m*B*n*.

Problema 317. — Traçar uma oval conhecendo-se o eixo maior.

Seja MN o eixo maior (fig. 628).

Construamos uma oval auxiliar dado o eixo menor de qualquer tamanho (fig. 629).

Façamos passar pela extremidade M do eixo MN uma

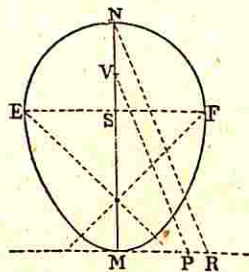
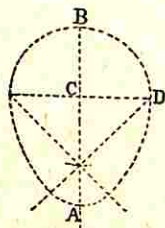



Fig. 628. Fig. 629.

perpendicular e appliquemos sobre ella MP = CD (metade do eixo menor da oval auxiliar).

Reproduzamos em MV a medida AB (eixo maior da oval auxiliar).

Unamos V a P e do ponto N tracemos uma parallela á recta VP até determinar o ponto R.

MR é a metade do eixo menor da oval pedida.

Appliquemos em NS a medida MR, pelo ponto S façamos passar uma perpendicular ao eixo MN, e depois reproduzamos em SE e SF a mesma medida NS.

Sendo EF o eixo menor, resolvamos o problema como nos ensina o precedente.

Problema 318. — Traçar uma curva semelhante á

oval, composta de seis arcos, e conhecendo-se o eixo menor.

Dividamos AB, o eixo menor (fig. 630) em quatro partes eguaes, e façamos passar pelo meio d'essa recta uma outra que lhe seja perpendicular.

Prolonguemos AB em ambas as direcções e appliquemos de A até C e de B até D uma mesma medida egual a $\frac{3}{4}$ do eixo AB.

Centro em M, com o raio MB descrevamos uma cir-

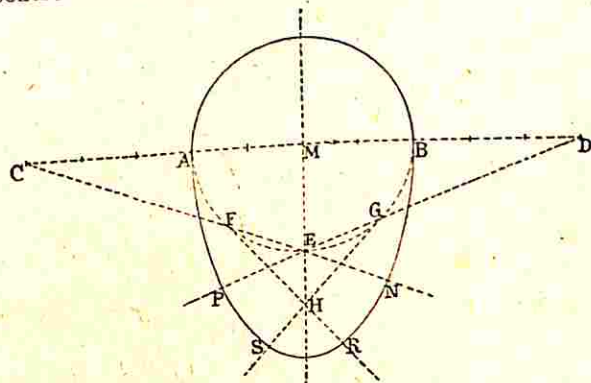



Fig. 630.

cumferencia de circulo que determinará o ponto E na perpendicular pelo meio de AB.

De C e D tiremos rectas que passem pelo ponto E; essas rectas determinam F e G na circumferencia.

Façamos EH = $\frac{1}{4}$ de AB e de F e G tracemos rectas que passem por H.

Do ponto C e raio egual a CB descrevamos o arco BN; do ponto D, com o mesmo raio descrevamos AP; de F e com o raio FN tracemos o arco NR; de G e com o mesmo raio descrevamos PS; e finalmente, do ponto H com

o raio HS descrevamos o arco SR que completará a curva pedida.

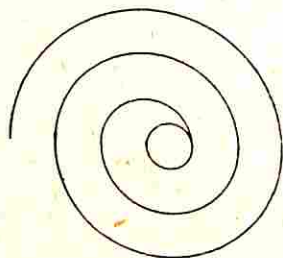
A curva plana que gira em torno de um ponto fixo e desvia-se sempre d'elle progressivamente chama-se **espiral** (fig. 631). O ponto fixo chama-se *pólo* da **espiral** e a circumferencia, *olho*.

ESPIRAL.

Na fig. 632, M é o *pólo*, e a circumferencia, cujo centro é o ponto M, é o *olho* da **espiral.**

Cada uma volta da **espiral** chama-se *espira*.

Fig. 631.

A **espiral** póde ter dous, tres, quatro, etc. centros. A de dous centros é formada de semi-circumferencias e os centros estão numa mesma recta; a de tres centros é formada de arcos eguaes á terça parte de uma circumferencia, isto é, de arcos que medem 120° cada um, e os centros são os vertices de um triangulo equilatero; a de quatro centros é formada de arcos de 90° e tem seus centros nos vertices de um quadrado.

O afastamento progressivo de uma **espiral** depende do numero de centros que serviram para formal-a. Este afastamento é menor na **espiral** *bicentrica*.

A mola que faz mover as rodas de um relogio tem a fórma a uma **espiral.**

O ornamento em **espiral** é muito empregado nos trabalhos de ferro forjado em grades, supportes, portões, extremidades de corrimões.

A **espiral** mais importante e mais simples é a de ***Archimedes*** cujas propriedades foram descobertas por este illustre geometra.

A **voluta** é uma curva analoga á **espiral** e que se encontra em cada face do capitel das columnas jonica, composita e corinthia.

TRAÇADO DA ESPIRAL

Problema 319. — Traçar uma espiral de dous centros.

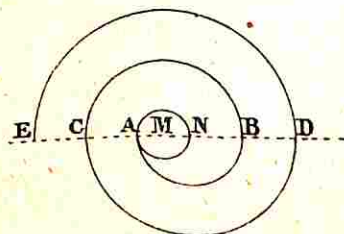



Fig. 632.

Tracemos uma recta indefinida (fig. 632) e marquemos

sobre essa recta os pontos M e N. Façamos centro em M e com um raio MN tracemos o olho da espiral. Façamos centro em N e com um raio NA descrevamos a semi-circumferencia AB; centro novamente em M e descrevamos BC e assim por diante fazendo sempre centro em N e M, descrevendo as semi-circumferencias CD, DE, etc.

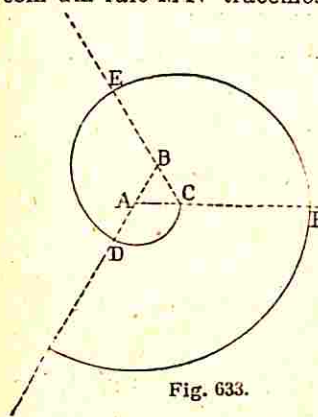



Fig. 633.

Problema 320. — Traçar uma espiral de tres centros.

Tracemos um triangulo equilatero ABC (fig. 633) e prolonguemos os lados como nos mostra a mesma figura.

Façamos centro em A e com um raio AC descrevamos o arco CD, depois em B e com o raio BD, descrevamos o arco DE; em seguida em C e com o raio CE descrevamos o arco EF e assim por diante, façamos centro successivamente em A, B e C tendo como raios as distancias de cada um d'esses centros á extremidade do ultimo arco descripto.

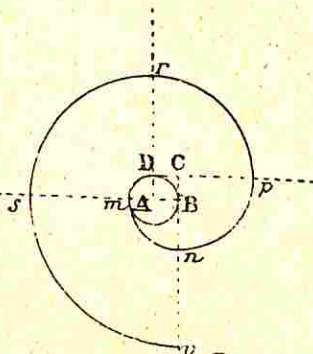



Fig. 634.

Problema 321. — Traçar uma espiral de quatro centros. Tracemos o quadrado ABDC e prolonguemos os lados como nos mostra a fig. 634.

Façamos centro em A e descrevamos o olho da espiral; o ponto B é o centro do arco *mn*, o ponto C é o centro do arco *np*; D é o centro do arco *pr*; A é novamente centro do arco *rs* e assim por diante. Os pontos ABCD são os centros dos arcos que formam a espiral.

Problema 322. — Traçar uma espiral oval.

Construamos um rectangulo ABCD (fig. 635) cujo comprimento seja o triplo da largura; prolonguemos AB, AD, CB, CD.

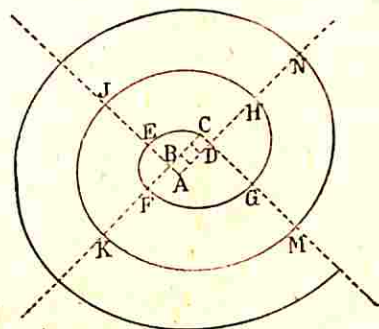



Fig. 635.

Descrevamos os arcos que fórmam a espiral com os elementos seguintes:

Centros em		Raios		Arcos
A	—	AC	—	CE
B	—	BE	—	EF
C	—	CF	—	FG
D	—	DG	—	GH
A	—	AH	—	HJ
B	—	BJ	—	JK
C	—	CK	—	KM
D, etc.	—	DM, etc.	—	MN, etc.

Problema 323. — Traçar uma espiral de Archimedes.

Descrevamos com um raio arbitrario MN (fig. 636) uma circumferencia que dividiremos em qualquer numero de partes eguaes; tiremos os raios pelos pontos de divisão e dividamos um d'elles, MN, por exemplo, em tantas partes eguaes quantas forem as divisões da circumferencia.

Façamos centro em M e com um raio M1 descrevamos um arco que determine no raio MA o ponto *a* da curva.

Depois, sempre com o centro em M e com os raios M2,

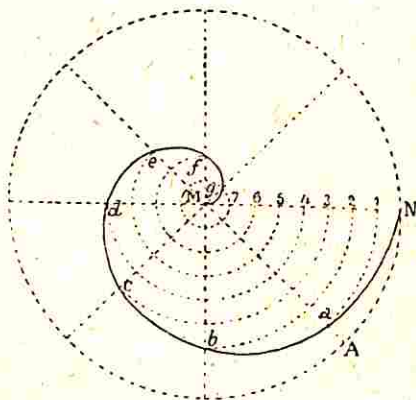



Fig. 636.

M3, M4, M5, M6, M7 descrevamos os arcos 2*b*, 3*c*, 4*d*, 5*e*, 6*f*, 7*g* cujos pontos extremos *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* indicam a passagem da espiral que se traçará á mão livre.

O ponto M chama-se *pólo* da espiral, e o raio MN da circumferencia recebe o nome de *passo*.

Quanto maior fôr o numero de divisões eguaes da circumferencia, melhor se traçará a espiral.

Problema 324. — Traçar uma voluta.

Seja OA (fig. 637) a distancia do centro da voluta ao seu ponto de partida A; dividamos OA em 9 partes eguaes

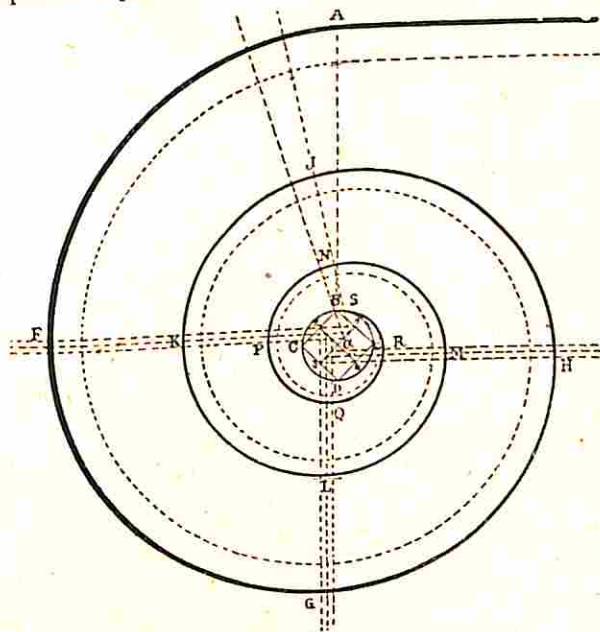



Fig. 637.

e com o raio $OB = \frac{OA}{9}$, descrevamos uma circumferencia que é o *olho* da voluta.

Inscrevamos nessa circumferencia um quadrado BCDE e dividamos seus lados ao meio.

Tracemos a recta que parte do ponto 1 e passa por 2, a que parte d'este ultimo ponto e passa por 3 e a que parte de 3 e passa por 4.

Unamos os pontos 1 a 3 e 2 a 4 e dividamos essas medianas do quadrado em seis partes eguaes como nos mostra mais augmentada e detidamente a figura 638.

Estes pontos de divisão serão numerados na direcção e do

modo indicado n'esse mesmo detalhe (fig. 638), assim : 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12.

Tiremos as rectas 5—6, 6—7, 7—8, 8—9, 9—10, 10—11,

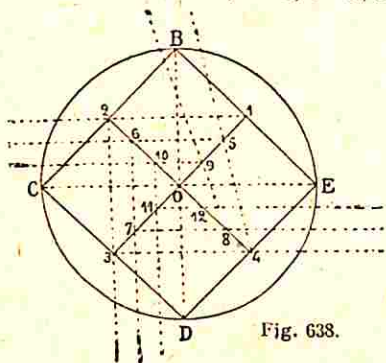



Fig. 638.

11—12 prolongando-as como tambem nos mostra o mesmo detalhe.

Traçadas todas estas rectas, descrevamos, (*) com os elementos da tabella junto, os arcos que formarão a voluta:

Centro	Raio	Arco	Ponto terminal do arco		
1	1—A	AF	Prolongamento da recta		1— 2
2	2—F	FG	»	»	2— 3
3	3—G	GH	»	»	3 - 4
4	4—H	HJ	»	»	4— 5
5	5—J	JK	»	»	5— 6
6	6—K	KL	»	»	6— 7
7	7—L	LM	»	»	7— 8
8	8—M	MN	»	»	8— 9
9	9—N	NP	»	»	9—10
10	10—P	PQ	»	»	10—11
11	11—Q	QR	»	»	11—12
12	12—R	RS	No ponto	S	

Descrevamos uma segunda voluta para dar a espessura da primeira.

(*) Exemplo do emprego da tabella: Com o centro no ponto 1 e raio igual a 1—A descrevamos o arco AF cujo ponto terminal F fique no prolongamento da recta 1—2.

HELICE.

Se enrolarmos, em um cylindro recto de base circular, um triangulo rectangulo de papel, de sorte que um dos cathetos fique perpendicular á base do cylindro, e o outro catheto depois de enrolado coincida com a circumferencia da base do mesmo cylindro : — a hypothenusa d'esse triangulo determinará a curva chamada **helice.**

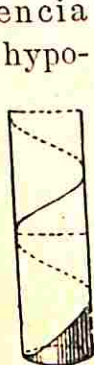
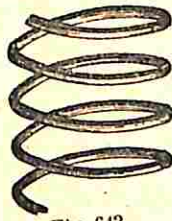



Fig. 639. Fig. 640. Fig. 641. Fig. 642. Fig. 643.

A linha curva gerada por um ponto que se move ao redor de um cylindro e eleva-se sempre de uma mesma quantidade, em cada revolução dada, chama-se **helice** (fig. 639).

A rosca de um trado (fig. 640), a de um parafuso (fig. 641), uma mola (fig. 642), dão-nos idéa exacta de uma **helice.** A haste de uma trepadeira (corriola), (fig. 643), dá-nos tambem idéa de uma **helice.**

Cada volta completa de uma helice chama-se *espira*, e a distancia que separa cada *espira* da seguinte é o *passo* da helice.

PARABOLA.

A curva plana aberta, cujos pontos são todos egualmente distantes de um ponto fixo *(fóco)* e de uma recta fixa *(directriz)*, chama-se **parabola** (fig. 644).

A **parabola** compõe-se de dous *ramos* symetricos em relação ao *eixo*.

A perpendicular que, abaixada do *fóco* á

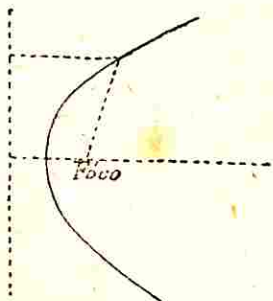



Fig. 644.

directriz, divide a curva em duas partes eguaes chama-se *eixo* da **parabola**.

Toda a linha traçada do fóco a um ponto qualquer da curva chama-se *raio vector*.

A distancia do fóco á directriz denomina-se *parametro*.

Á recta que, situada no mesmo plano da curva, toca a **parabola** em um só ponto dá-se o nome de *tangente*; o ponto é o *de contacto*.

A perpendicular á tangente no ponto de contacto é a *normal*; o ponto em que a normal encontra a **parabola** é o *de incidencia*.

Chama-se *subtangente* a projecção, sobre o eixo, da parte da tangente comprehendida entre o eixo e o ponto de contacto.

Subnormal é a projecção sobre o eixo da porção da normal comprehendida entre o pé d'esta normal e o eixo.

A distancia do vertice ao fóco é a *distancia focal*.

Qualquer recta que tenha os extremos sobre a **parabola** é uma *corda*.

Toda a recta tirada de um ponto da curva e parallela ao eixo da **parabola** é um *diametro*.

A tangente na extremidade de um diametro é parallela ás cordas que este diametro divide ao meio.

A porção de superficie comprehendida entre um trecho da **parabola** e uma corda perpendicular ao eixo é um *segmento parabolico.*

Na fig. 645, AX é o *eixo;* F, o *fóco;* MN, a

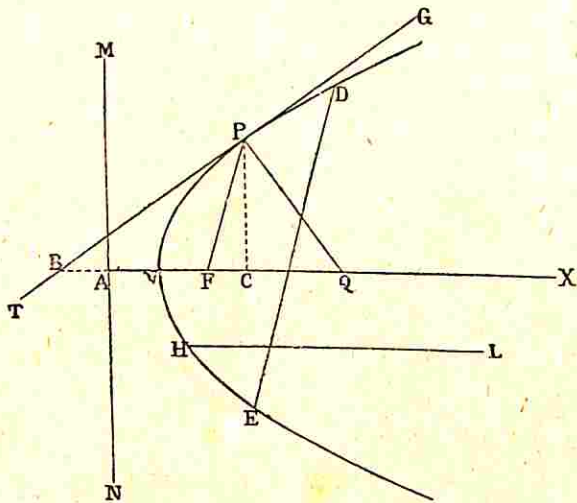



Fig. 645.

directriz; V, o *vertice;* FP, o *raio vector;* AF, o *parametro;* TG, uma *tangente;* PQ, uma *normal;* P, o *ponto de contacto* e *de incidencia;* VF, a *distancia focal;* BC, uma *subtangente;* CQ, uma *subnormal;* DE, uma *corda;* HL, um *diametro.*

Uma pedra arremessada á mão e com certa

elevação descreve uma curva semelhante á **parabola.**

Certos cometas não periodicos descrevem ao redor do sol, orbitas parabolicas cujo fóco é occupado pelo sol.

Os reflectores das lanternas de alguns carros, das locomotivas, dos navios, e em geral, de todos os apparelhos que dão luz para ser vista de muito longe, são parabolicos.

Nos pharóes são tambem empregados reflectores parabolicos; os espelhos dos telescopios são parabolicos.

Em certas pontes pensis, a cadeia presa ás hastes verticaes que sustentam o estrado, tem a fórma de uma **parabola.**

TRAÇADO DA PARABOLA

Problema 325. — Traçar uma parabola sendo dados o fóco e a directriz.

1.º processo : — com uma regua, um esquadro e um cordél.

Façamos coincidir uma aresta da regua com a directriz (fig. 646); apliquemos o esquadro contra a regua, fixemos um cordel do tamanho do lado CG, do esquadro, nos pontos C e F. Conservemos constantemente, com a ponta de um lapis, o cordél esticado e parte d'elle applicado ao longo do lado CG, e façamos ao mesmo tempo escorregar o

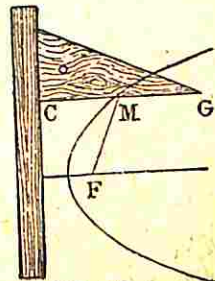



Fig. 646.

esquadro pela regua. Com este movimento contínuo, a ponta do lapis conservar-se-á sempre equidistante da regua e do ponto F e descreverá um ramo da parabola. Esta mesma operação feita do outro lado do eixo completará a parabola.

2.° processo: — com o compasso.

F é o fóco (fig. 647), MN a directriz. Façamos passar

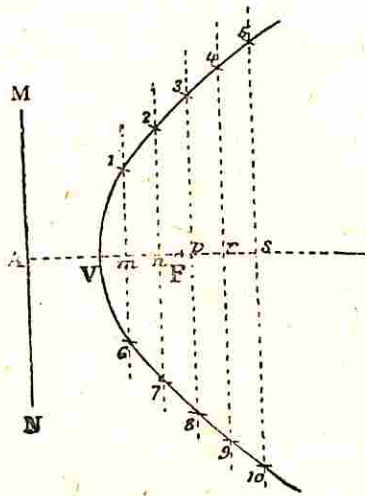



Fig. 647.

pelo fóco uma perpendicular á directriz; dividamos FA ao meio; o ponto V será o vertice da parabola.

Tomemos sobre o eixo as distancias eguaes *mn*, *np*, *pr*, *rs*, etc.; pelos pontos *m*, *n*, *p*, *r*, *s* tracemos rectas parallelas á directriz. Do fóco, como centro, e com os raios eguaes a *m*A, *n*A, *p*A, *r*A, *s*A, etc., cortemos as parallelas nos pontos 1 e 6; 2 e 7; 3 e 8; 4 e 9; 5 e 10, etc., os quaes determinam a passagem da parabola.

Problema 326. — Construir uma parabola conhecendo-se a directriz e o vertice.

Seja DT a directriz e V o vertice (fig. 648).

Determinemos o eixo, abaixando de V uma perpendicular a DT; e o fóco, reproduzindo em VF a medida VM.

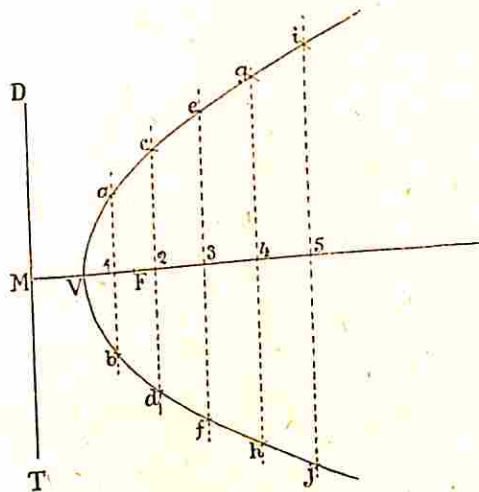



Fig. 648.

Marquemos de V as medidas V 1, V 2, V 3, V 4, etc., e pelos pontos 1, 2, 3, 4, etc., façamos passar perpendiculares ao eixo.

Façamos sempre centro em F e com o raio M 1 determinemos os pontos *a* e *b*; com o raio M 2 os pontos *c* e *d*; com o raio M 3 os pontos *e* e *f*, etc.

Estes pontos marcam a passagem da curva que será traçada á mão livre.

Problema 327. — Construir uma parabola conhecendo-se o fóco e duas tangentes.

Seja F o fóco e AB e CD as duas tangentes (fig. 649), Abaixemos do fóco uma perpendicular sobre cada tan-

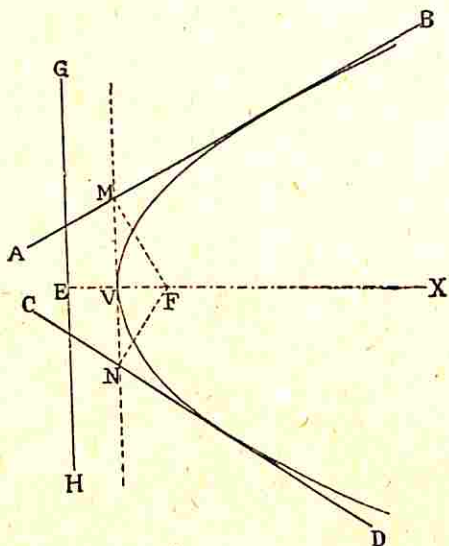



Fig. 649.

gente; os pontos M e N determinam a passagem da tangente pelo vertice da curva.

A recta VFX é o eixo.

Prolonguemos este eixo de uma quantidade VE = VF e pelo ponto E tracemos GH parallela a MN.

GH é a directriz e F é o fóco: tracemos a parabola como nos ensina o problema 325.

Problema 328. — Construir uma parabola conhecendo-se o fóco, o eixo e uma tangente.

F é o fóco, MT, a tangente e NX, o eixo (fig. 650).

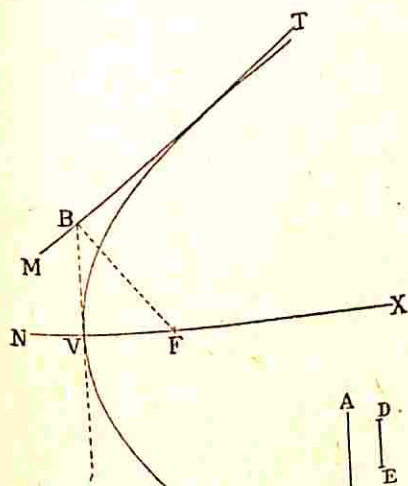
De F abaixemos uma perpendicular sobre a tangente e do ponto B uma outra sobre o eixo.

V é o vertice da parabola.

Com estes elementos, tracemos a parabola como nos indicam os problema antecedentes.

Fig. 650.

Problema 329. — Construir uma parabola conhecendo-se a distancia focal.

Seja DE a distancia focal (fig. 651).

Tracemos uma recta indefinida MX e reproduzamos, a partir do extremo M, duas medidas consecutivas MV e VF, eguaes á distancia DE.

O ponto F é o fóco, V, o vertice e M um dos pontos da directriz da parabola. Tiremos pelo ponto M uma perpendicular AB á recta MX; essa perpendicular é a directriz.

Com esses elementos construamos a parabola.

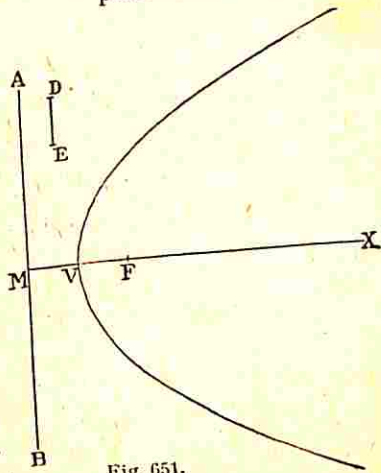



Fig. 651.

Problema 330. — Construir uma parabola conhecendo-se a directriz, uma tangente e o ponto de contacto.

Seja MN a directriz, TG a tangente, e G o ponto de

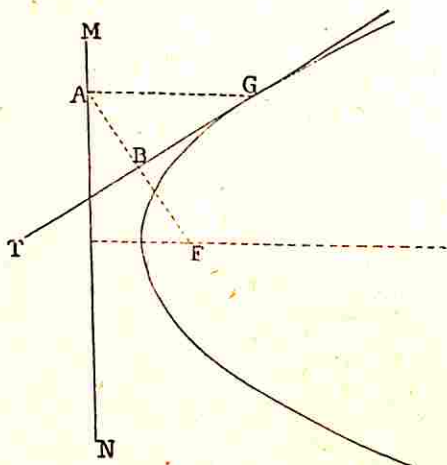



Fig. 652.

contacto (fig. 652). Abaixemos do ponto G uma perpendicular sobre a directriz, e do ponto A uma outra sobre a tangente. Sendo o ponto A symetrico ao fóco; tomemos BF = BA.

Com estes elementos (fóco e directriz) construamos a parabola.

Problema 331. — Traçar uma tangente á parabola por um ponto dado na curva.

Seja M o ponto dado na parabola (fig. 653).

Façamos FB = FM e tracemos a recta que passa por B e M, e teremos a tangente pedida.

Outro processo. — Abaixemos do ponto M a perpendi-

cular ME sobre a directriz e unamos E a F; a tangente será a perpendicular traçada pelo meio de FE.

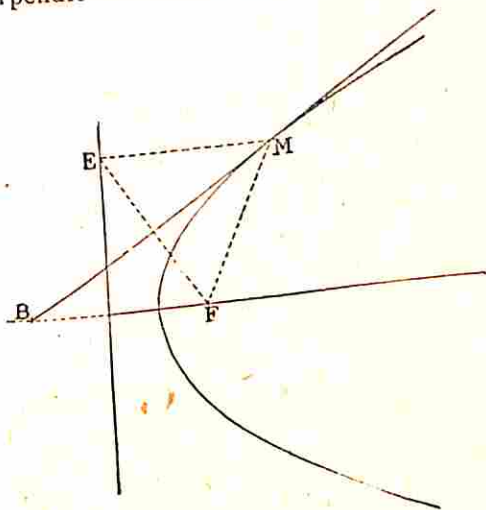



Fig. 653.

Problema 332. — Traçar uma tangente á parabola por um ponto exterior.

Seja A o ponto exterior (fig. 654).

Do ponto A, como centro e AF como raio, descrevamos um arco que determinará o ponto E na directriz.

Tiremos a recta EF e do ponto A abaixemos uma perpendicular sobre ella. Esta perpendicular será a tangente pedida.

O ponto de contacto N é determinado pela intersecção d'esta perpendicular com a recta EN parallela ao eixo.

Nota. — Para que este problema possa ter solução é preciso que a distancia do ponto A á directriz seja menor que o raio do circulo descripto do ponto A; isto é, menor que **AF**.

Problema 333. — Traçar á parabola uma tangente parallela a uma recta dada.

Seja F o fóco da parabola e MN a recta dada (fig. 655).

Do fóco abaixemos uma perpendicular sobre a recta MN

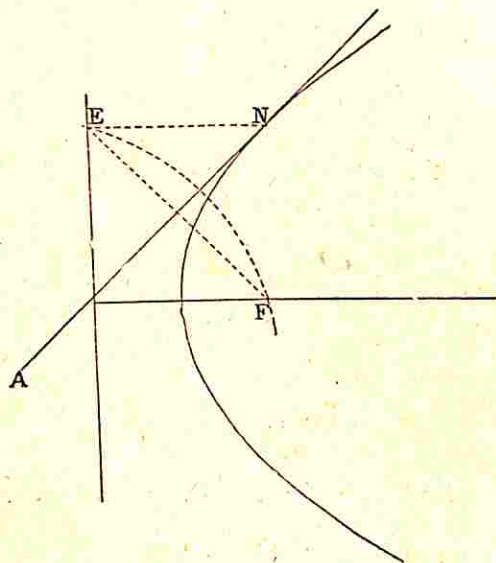



Fig. 654.

até encontrar a directriz no ponto P; levantemos uma perpendicular AD pelo meio de FP : esta perpendicular será a tangente pedida.

O ponto de contacto B será determinado pela intersecção d'esta tangente com uma parallela ao eixo, e tirada do ponto P.

O problema seria impossivel se a recta MN fosse parallela ao eixo; em qualquer outro caso será sempre possivel.

Problema 334. — Sendo dado um arco de parabola, determinar seu eixo, seu fóco e sua directriz.

Seja BAC o arco de parabola (fig. 656).

Tracemos nesta curva duas cordas parallelas BC e DE e façamos passar pelos meios d'essas cordas uma recta que

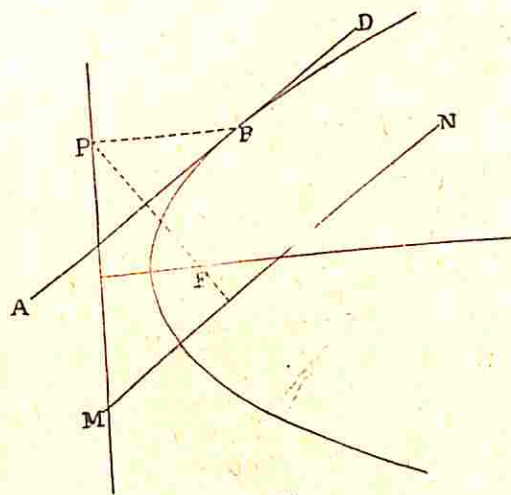



Fig. 655.

é o diametro da curva e A, sua extremidade; tomemos no prolongamento de GA uma distancia AP = AG e unamos PF e PC; estas linhas serão tangentes á parabola nos pontos B e C.

Conhecidas estas duas tangentes e os pontos de contacto, tracemos por B e C as rectas BH e CJ parallelas ao diametro. Formemos os angulos PBF = MBH e PCF = JCN; essas rectas se cortam no fóco F pelo qual tracemos parallelamente a PG a recta FX, que é o eixo da curva.

Para ter a directriz tomemos o ponto R symetrico ao

ao ponto F em relação á tangente PM e tracemos de R a

Fig. 656.

recta RV perpendicular a FX; essa perpendicular é a directriz.

A linha curva, plana, composta de dous ramos indefinidos e oppostos, na qual é constante a differença das distancias de todos os seus pontos a dous pontos

HYPERBOLE.

fixos *(fócos)*, chama-se **hyperbole** (fig. 657)

Os pontos fixos chamam-se *fócos.*

As rectas que partem dos fócos para qualquer ponto da curva chamam-se *raios vectores.*

A distancia entre os fócos recebe o nome de *distancia focal.*

A **hyperbole** tem dous *eixos*, um *transverso* e outro *não transverso.*

Fig. 657.

O *eixo transverso* divide a **hyperbole** em duas partes eguaes e passa pelos fócos, e o *não transverso* é perpendicular ao meio do *eixo transverso;* o ponto de intersecção dos dous eixos é o *centro* da **hyperbole.**

Os pontos de intersecção dos ramos da curva com o eixo transverso são os *vertices* da **hyperbole.**

A parte do eixo transverso que fica comprehendida entre os vertices da curva dá-se o nome de *eixo real.*

A perpendicular ao eixo transverso, pas-

sando por qualquer dos fócos e tendo suas extremidades na curva, chama-se *parametro.*

As duas rectas que passam pelo centro da **hyperbole,** fazendo com o eixo transverso um mesmo angulo e aproximando-se muito da curva sem nunca a encontrar, são as *asymptótas.*

Tangente é qualquer recta que, situada no plano da curva, toca num só ponto a **hyperbole.** Este ponto denomina-se *ponto de contacto.*

Normal é a perpendicular á tangente no ponto de contacto.

O ponto onde a normal encontra a **hyperbole** é o de *incidencia.*

Circumferencia directriz é a que, descripta com o raio egual ao eixo real, tem o centro em qualquer dos fócos.

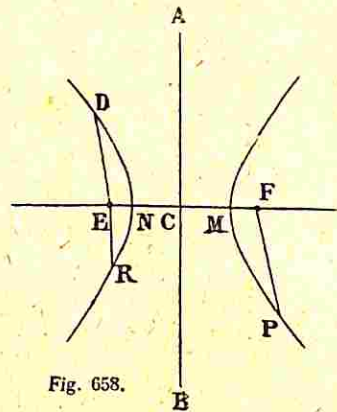



Fig. 658.

Uma **hyperbole** é *equilatera* quando as asymptótas são bissectrizes dos angulos formados pelos eixos.

Na fig. 658 os pontos E e F são os *fócos;* N e M, os *vertices;* C, o *centro;* a recta que passa pelos fócos é o *eixo transverso;* AB é o *eixo não transverso;* FP, ED, ER são os *raios vectores;* EF é a *distancia focal;* NM a *differença constante* ou *eixo real.*

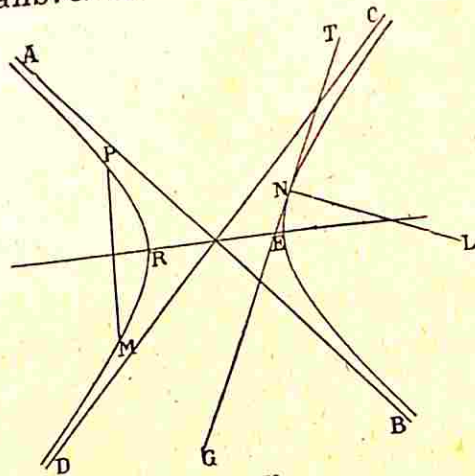



Fig. 659.

Na figura 659, PM é o *parametro;* AB e CD são as *asymptótas;* TG é uma *tangente;* NL é uma *normal;* N é o *ponto de incidencia* e tambem o de *contacto* da tangente; RE é o *eixo real.*

TRAÇADO DA HYPERBOLE

Problema 335. — Traçar uma hyperbole com o compasso sendo dados os fócos e os vertices.

Tracemos uma recta indefinida, marquemos os fócos E e F (fig. 660); M e N os vertices da hyperbole.

Dividamos MN ao meio : o ponto O será o centro da hyperbole. Marquemos a partir de F para R as distancias F*m*, *mn*, *np*, *pr* eguaes entre si. Do ponto F como centro e com os raios *m*N, *n*N, *p*N, *r*N, descrevamos diversos arcos

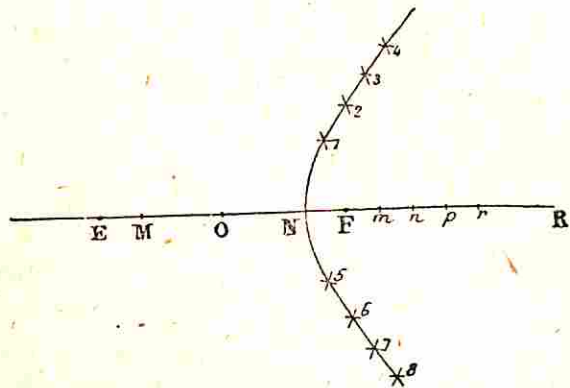



Fig. 660.

de um e outro lado do eixo transverso; do ponto E e com os raios eguaes a *m*M, *n*M, *p*M, *r*M, determinemos os pontos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, os quaes marcam a passagem de um ramo da hyperbole.

Procedamos de modo inverso em relação aos fócos E e F e obteremos o outro ramo da hyperbole.

Problema 336. — Traçar uma hyperbole de um movimento continuo conhecendo-se os fócos e a differença constante dos raios vectores de cada ponto.

Sejam MN a differença constante, E e F os fócos (fig. 661).

Descrevamos primeiro o ramo cujos pontos estão mais proximos de F do que de E. No fóco E fixemos um prégo, parafuso ou alfinete, ao redor do qual faremos girar uma regua

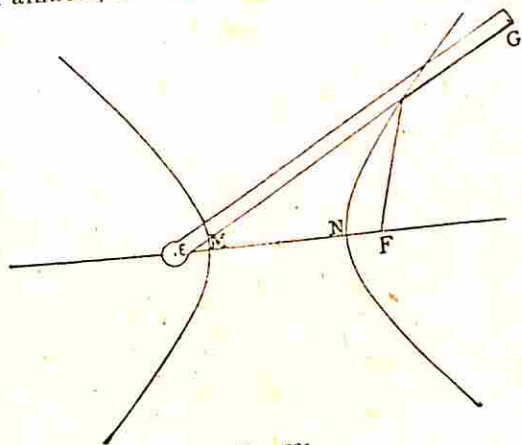



Fig. 661.

EG de um tamanho maior que a distancia focal; na extremidade d'essa regua fixemos um cordel mais curto do que ella e cujo comprimento e o da regua tenham uma differença egual ao eixo real. A outra extremidade do cordel será fixada no ponto F; se fizermos girar a regua ao redor do ponto E e ao mesmo tempo mantivermos um lapis junto á regua e esticando o cordel, a ponta do lapis descreverá o arco da hyperbole.

Problema 337. — Traçar uma tangente á hyperbole em um ponto dado nesta curva.

M é o ponto dado na hyperbole (fig. 662).

Tracemos os raios vectores EM e FM do ponto de contacto; a bissectriz do angulo EMF será a tangente pedida.

Para tirarmos essa bissectriz poderemos marcar MA =

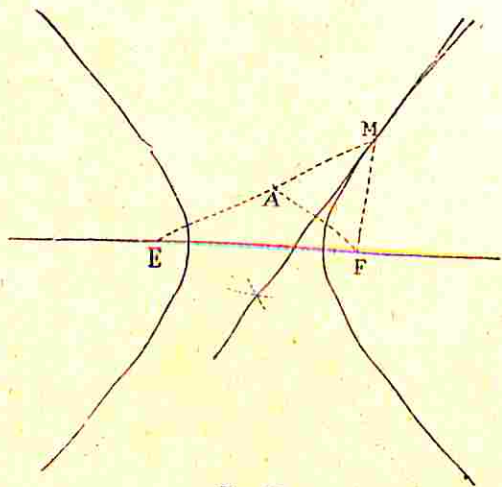



Fig. 662.

MF depois unir A a F e traçar uma perpendicular pelo meio d'esta recta.

Problema 338. — Traçar uma tangente á hyperbole por um ponto exterior.

Seja P este ponto (fig. 663); do ponto E, como centro, com um raio egual ao eixo real, descrevamos um circulo; do ponto P, como centro, e PF como raio, descrevamos um segundo circulo que cortará o primeiro no ponto H; tracemos a recta HF e abaixemos do ponto P uma perpendicular sobre esta linha; esta perpendicular será a tangente pedida.

O ponto de contacto M é determinado pela intersecção d'esta tangente com o prolongamento da recta EH

Os dois circulos cortam-se em um segundo ponto N com o qual construiremos uma segunda tangente passando pelo ponto P.

Nota. — Para que o problema seja possivel é preciso

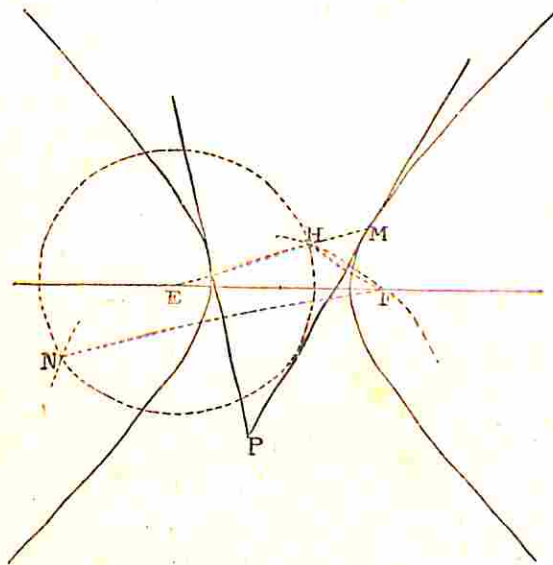



Fig. 663.

que as duas circumferencias se cortem, e para isso que a distancia PE de seus centros seja menor que a somma dos raios e maior que sua differença, isto é:

EP < PF + eixo real ou EP > eixo real — EP

Problema 339. — Traçar á hyperbole uma tangente parallela a uma recta dada.

AB é a recta dada (fig. 664).

Do fóco E como centro, com um raio egual ao eixo real. descrevamos a circumferencia directriz; do fóco F tracemos uma recta perpendicular a AB: esta recta cortará o circulo em dois pontos M e N, pelos meios das rectas FM e FN tracemos parallelas á AB; estas parallelas serão as tangentes pedidas.

Os pontos de contacto R e V serão os pontos de intersecção das tangentes com os prolongamentos das rectas EM e NE.

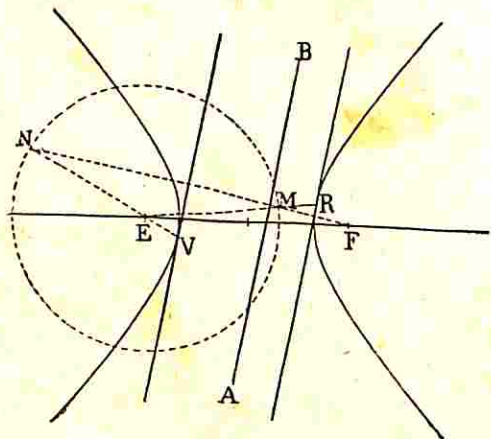



Fig. 664.

Nota. — Para que o problema seja possivel é preciso que a perpendicular abaixada do ponto F sobre a recta dada, encontre a circumferencia directriz.

Problema 340. — Traçar as asymptótas de uma hyperbole.

Descrevamos do ponto C uma circumferencia com o

raio CF (fig. 665) e pelos pontos A e B façamos passar perpendiculares ao eixo real.

Estas perpendiculares determinam na circumferencia os pontos D, G, H, L, por onde passam as asymptótas.

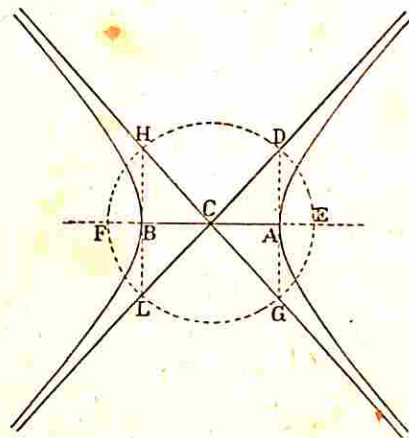



Fig. 665.

EXERCICIOS

1. — João! que é uma ellipse?
2. — Que é superficie elliptica?
3. — Que são fócos da ellipse?
4. — Que são eixos da ellipse?
5. — Que é eixo maior? — menor?
6. — Onde estão situados os fócos de uma ellipse?
7. — Que são raios vectores?
8. — A que é egual a somma de dous raios vectores?
9. — Que são vertices de uma ellipse?
10. — Que é distancia focal?
11. — Que é o centro de uma ellipse?
12. — Que são raios de uma ellipse?

13. — Que é um diametro?
14. — Conheces alguns objectos com a fórma elliptica?
15. — Que é uma corda?
16. — Que são parametros?
17. — Que é uma normal?
18. — Qual o pé da normal?
19. — Que são diametros conjugados?
20. — Que é uma circumferencia directriz da ellipse?
21. — Que é excentricidade de uma ellipse?
22. — Se a excentricidade fôr pequena, a ellipse é alongada ou arredondada?
23. — Se fôr grande a excentricidade, a ellipse é alongada ou arredondada?
24. — Traça uma ellipse; — tira um raio; — um diametro; — marca a distancia focal; — onde o centro? — os vertices?
25. — Traça uma ellipse; tira-lhe uma corda; — uma normal; — os parametros.
26. — 0m,060 é a medida de um eixo da ellipse; 0m,032 é a medida do outro eixo: traça essa ellipse.
27. — Quantos processos conheces para traçar uma ellipse?
28. — Quaes são?
29. — Dada uma ellipse e um ponto situado nessa curva, traça-lhe uma tangente.
30. — Por um ponto fóra de uma ellipse traça uma tangente a essa curva.
31. — Traça uma ellipse e uma recta e depois uma outra recta que seja tangente á ellipse e parallela á primeira recta.
32. — Que é uma falsa ellipse?
33. — Por que nome é vulgarmente conhecida essa curva?
34. — A que curva se assemelha?
35. — Qual o grande eixo? — e o pequeno eixo de uma falsa ellipse?
36. — Onde fica o centro d'essa curva?
37. — Por quantos arcos é formada uma falsa ellipse?
38. — Que é um raio? — um diametro de uma falsa ellipse?
39. — Quando é uma falsa ellipse, alongada? — e arredondada?

40. — 0m,056 é a medida de um eixo; 0m,027 o outro eixo da falsa ellipse: traça essa curva.
41. — Quantos processos conheces para resolver o exercicio antecedente?
42. — Quaes são?
43. — Traça uma falsa ellipse arredondada.
44. — Idem uma falsa ellipse alongada.
45. — Que é uma oval?
46. — Como é geralmente conhecida essa curva?
47. — Que é superficie oval?
48. — Traça uma oval.
49. — Mostra o grande eixo; — o pequeno eixo; — os centros.
50. — Que objectos têm a fórma oval?
51. — 0m,063 é a medida do eixo menor: traça a oval.
52. — 0m,08 é a medida do eixo maior: traça a oval.
53. — Que é uma espiral?
54. — Que é o pólo de uma espiral? — o olho?
55. — Que é uma espira?
56. — Quantos centros póde ter uma espiral?
57. — Traça uma espiral de dous centros; — de tres; — de quatro; — de cinco.
58. — Onde viste um ornamento em espiral?
59. — Qual a espiral mais simples?
60. — Que é uma voluta?
61. — Onde se encontram os ornamentos em voluta?
62. — Traça uma espiral oval.
63. — Traça uma espiral de Archimedes.
64. — Traça uma voluta.
65. — Que é uma helice?
66. — Mostra praticamente como se obtém uma helice.
67. — Conheces alguns objectos com a fórma de uma helice? — quaes são?
68. — Que é um passo de uma helice? — e uma espira?
69. — Que é uma parabola?
70. — Que nome tem o ponto fixo?
71. — Qual é a directriz?
72. — Que é o eixo de uma parabola?
73. — Onde o vertice de uma parabola?
74. — Que é o parametro?

75. — Que é um raio vector?
76. — Dá um exemplo de uma parabola
77. — Que é uma tangente á parabola?
78. — Que é uma normal?
79. — Traça uma parabola; — uma tangente; — uma normal; — mostra o ponto de incidencia.
80. — Mostra a distancia focal.
81. — Dize onde é empregada a parabola.
82. — Que é uma subtangente?
83. — Que é uma subnormal?
84. — Que é um diametro?
85. — Que é um segmento parabolico?

Traça uma parabola com os dados seguintes:

86. — directriz e o vertice.
87. — o fóco e duas tangentes.
88. — o fóco, o eixo e uma tangente.
89. — distancia focal egual a 0^m,012.
90. — a directriz, uma tangente e o ponto de contacto.
91. — Traça uma tangente a uma parabola por um ponto dado na curva.
92. — Idem por um ponto exterior.
93. — Traça uma tangente a uma parabola e parallela a uma recta dada.
94. — Como se determinam o eixo, o fóco e a directriz de uma parabola?
95. — Dados o fóco e a directriz, traça uma parabola.
96. — Que é uma hyperbole?
97. — De quantos ramos é composta?
98. — Como se chamam os pontos fixos?
99. — Que são raios vectores de uma hyperbole?
100. — Que é distancia focal?
101. — Como se chamam os eixos de uma hyperbole?
102. — Por que pontos passa o eixo transverso?
103. — Onde fica o centro de uma hyperbole?
104. — Que são vertices da hyperbole?
105. — Que é parametro de uma hyperbole?
106. — Que é uma normal da hyperbole?
107. — Como se chama o ponto em que a normal encontra a hyperbole?

108. — Que são asymptótas?
109. — Que são circumferencias directrizes?
110 — Que é uma hyperbole equilatera?
111. — Traça uma hyperbole.
112. — Mostra a differença constante.

Traça uma hyperbole sendo conhecidos:

113. — os fócos e os vertices.
114. — os fócos e a differença constante.
115. — Traça uma tangente á hyperbole em um ponto dado na curva.
116. — Idem por um ponto exterior.
117. — Idem e que seja parallela a uma recta dada.
118. — Traça as asymptótas de uma hyperbole.

INDICE

PARIS. — TYP. G. AILLAUD

$2x = 180° - 30°$

$2x = 150$

$x = \frac{150}{2}$

$x = 75°$

$B = 35° 40'$

ans – 9.